Kartografie 1 - přednáška 6

Jiří Cajthaml

ČVUT v Praze, katedra geomatiky

letní semestr 2024/2025

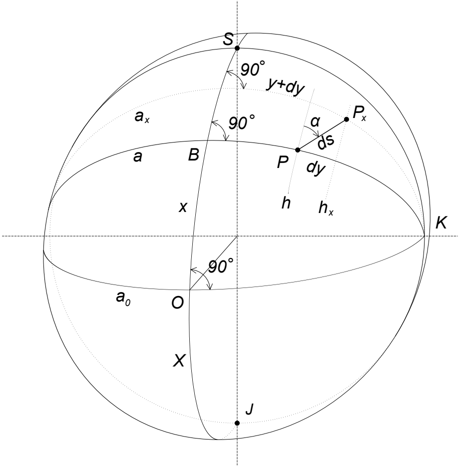
Kartografická zobrazení použitá na našem území

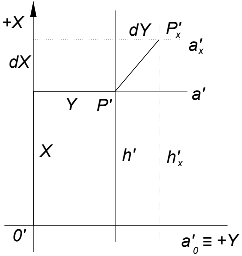
- důležitá jsou zejména zobrazení pro státní mapová díla
- v geodetické a kartografické praxi je možné se nejčastěji setkat s následujícími mapovými díly:
  - mapy stabilního katastru (v Cassiniho válcovém ekvidistantním zobrazení)
  - mapy Katastru nemovitostí (v Křovákově kuželovém konformním zobrazení)
  - vojenské topografické mapy (v Gaussově zobrazení v poledníkových pásech)
  - Základní topografické mapy ČR, ZABAGED (v Křovákově kuželovém konformním zobrazení)

Cassiniho zobrazení

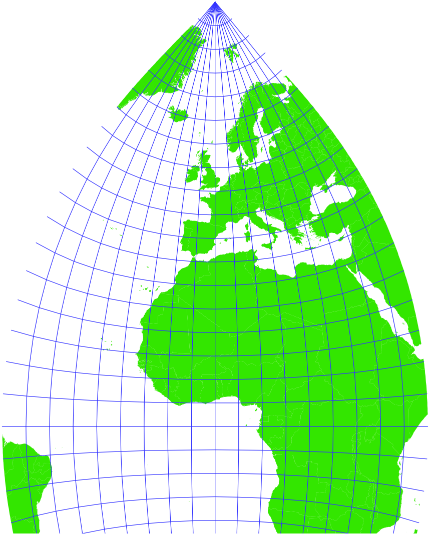
- válcové ekvidistantní zobrazení v transverzální poloze
- někdy také nazýváno Cassini-Soldnerovo
- válec se dotýkal referenční plochy v nezkresleném poledníku
- nezkreslený poledník prochází středem území
- zkreslení roste se vzdáleností od tohoto poledníku
- celkem bylo použito 11 souřadnicových soustav
    - pro Čechy – Gusterberg
    - pro Moravu – Sv. Štěpán
- osa X je obrazem nezkresleného poledníku
- +X na sever, +Y na východ

Cassiniho zobrazení





Cassiniho zobrazení



Cassiniho zobrazení

- obraz základního poledníku: úsečka
- obraz rovníku: úsečka
- zeměpisné poledníky a rovnoběžky: obecné křivky
- kartografické poledníky a rovnoběžky: úsečky
- kartografické poledníky jsou nezkresleny
- postup zobrazení:
    - převod U,V na Š,D (sférická trigonometrie)
    - ekvidistantní válcové zobrazení pro Š,D

Cassiniho zobrazení – převod U,V na Š,D

- základní vztahy:

$$\sin \check{S} = \sin U_k \sin U + \cos U_k \cos U \cos \Delta V$$

$$\sin D = \frac{\sin \Delta V \cos U}{\cos \check{S}}$$

- $U_k = 0^\circ, V_k = 90^\circ$
- vztahy:

$$\sin \check{S} = \cos U \sin V$$

$$\sin D = \frac{\cos V \cos U}{\cos \check{S}}$$

- dále platí:

$$\sin U = \sin U_k \sin \check{S} + \cos U_k \cos \check{S} \cos (180^\circ - D)$$

$$\sin U = -\cos \check{S} \cos D$$

- tedy:

$$\mathrm{tg}\, D = \frac{\frac{cosUcosV}{\cos \check{S}}}{-\frac{sinU}{\cos \check{S}}} = -\frac{cosV}{\mathrm{tg}\, U}$$

Cassiniho zobrazení – pro Š,D

- zobrazovací rovnice:

$$Y = R\,Š$$

$$X = R\,D$$

$$Y = R \arcsin\left(\cos U \sin V\right)$$

$$X = R\,(-\frac{\cos V}{\operatorname{tg} U})$$

- délkové zkreslení:

$$m_\alpha^2 = m_p^2 \cos^2\alpha + m_r^2 \sin^2\alpha$$

$$m_\alpha^2 = m_h^2 \cos^2\alpha + m_a^2 \sin^2\alpha$$

$$m_\alpha^2 = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(Y/R)} + \sin^2\alpha$$

$$m_\alpha^2 \doteq 1 + \frac{Y^2}{2R^2}\cos^2\alpha$$

Cassiniho zobrazení

- ukázka map stabilního katastru

Křovákovo zobrazení

- pojmenováno po ministerském radovi Ing. Josefu Křovákovi
- jedná se o kombinaci dvou zobrazení:
    - Gaussovo konformní zobrazení z elipsoidu na kouli
    - Lambertovo konformní kuželové zobrazení v obecné poloze
- toto zobrazení je základem S-JTSK
- používané pouze v ČR a SR

Křovákovo zobrazení – schéma

$$\varphi\,,\ \lambda \ \xrightarrow[I]{}\ U,\ V \ \overset{}{\underset{II}{\dashrightarrow}}\ \check{S}\,,\ D \ \xrightarrow[III]{}\ \rho\,,\ \varepsilon \ \underset{IV}{\dashrightarrow}\ X\,,\ Y$$

- I. Besselův elipsoid zobrazen konformně Gaussovým způsobem na kouli.
- II. Zeměpisné souřadnice převedeny na kartografické souřadnice vzhledem ke zvolenému kartografickému pólu.
- III. Konformní zobrazení kartografických souřadnic z koule na plášť kužele.
- IV. Převedení polárních souřadnic na pravoúhlé.

Křovákovo zobrazení – fáze I

- použit Besselův elipsoid

$$a = 6377397,155m \quad b = 6356078,9633m$$

- zobrazovací rovnice:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right) = \frac{1}{k}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ\right)\left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}\right]^{\alpha}, V = \alpha\,\lambda$$

- zeměpisné délky se počítají od Ferra $(17^\circ 39' 46{,}002'' z.d.)$
- jako základní rovnoběžka byla zvolena $\varphi_o = 49^\circ 30'$
- vypočítané konstanty zobrazení:

$$U_o = 49^\circ 27' 35{,}84625''$$

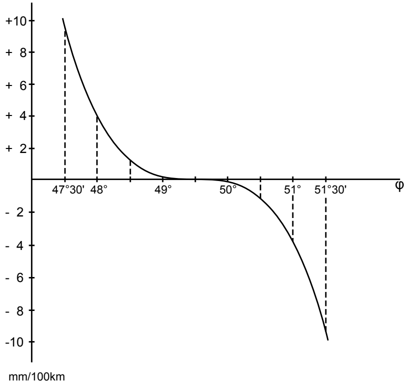
$$\alpha = 1,000597498372$$

$$k = 0,9965924869$$

$$R = 6380703,6105\ m$$

- délkové zkreslení:

$$m = \frac{\alpha \;\; R \cos U}{N \cos \varphi}$$



Křovákovo zobrazení – fáze II

- obecná poloha kužele zvolena, protože území ČSR nebylo protáhlé přímo podél zeměpisné rovnoběžky
- v normální poloze by ČSR byla v pásu o šířce $3^\circ 20'$ (zkreslení na okraji $+42 cm/km$)
- v obecné poloze je ČSR v pásu o šířce $2^\circ 31'$ (zkreslení na okraji $+24 cm/km$)
- jako základní kartografická rovnoběžka byla zvolena $\check{S}_0 = 78^\circ 30'$
- okrajové rovnoběžky jsou $\check{S}_1 = 77^\circ 13'$ a $\check{S}_2 = 79^\circ 44'$
- základní rovnoběžka je kolmá na zeměpisný poledník $\lambda = 42^\circ 30' v.F.$ v bodě A ($\varphi_A = 48^\circ 15'$)
- z předchozích hodnot byl určen kartografický pól:

$$U_K = 59^\circ 42' 42{,}6969''$$

$$V_K = 42^\circ 31' 31{,}41725''$$

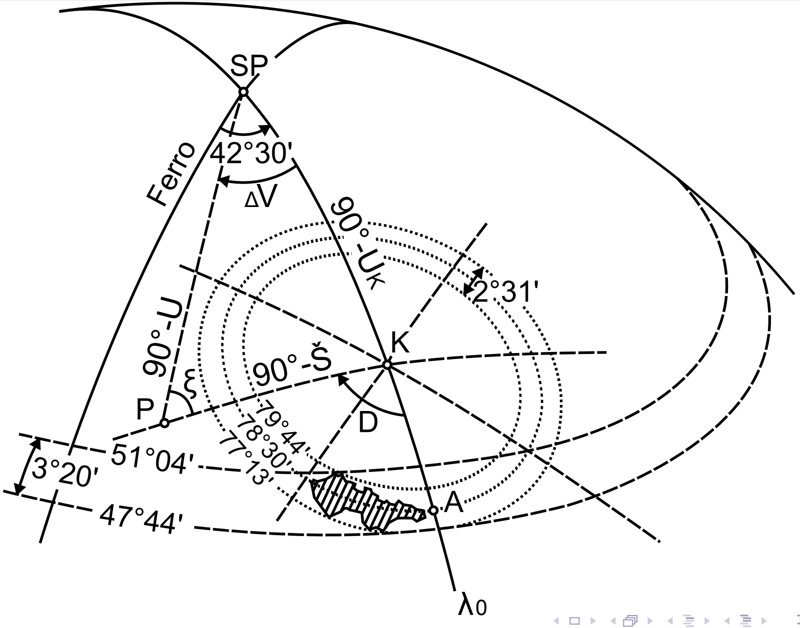
Křovákovo zobrazení – fáze II

- při znalosti kartografického pólu je již snadné určit kartografické souřadnice pomocí sférické trigonometrie

$$\sin \check{S} = \sin U_k \sin U + \cos U_k \cos U \cos \Delta V$$

$$\sin D = \frac{\sin \Delta V \cos U}{\cos \check{S}}$$

Křovákovo zobrazení – fáze II



Křovákovo zobrazení – fáze III

- použito Lambertovo konformní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou rovnoběžkou $\check{S}_0 = 78^\circ 30'$
- kartografickým pólem je vrchol kužele (je pouze cca 130km nad terénem – jde tedy o hodně plochý kužel)
- zobrazovací rovnice:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\mathrm{tg}(\frac{\check{S}_0}{2} + 45^\circ)}{\mathrm{tg}(\frac{\check{S}}{2} + 45^\circ)} \right)^n , \qquad \varepsilon = n\,D$$

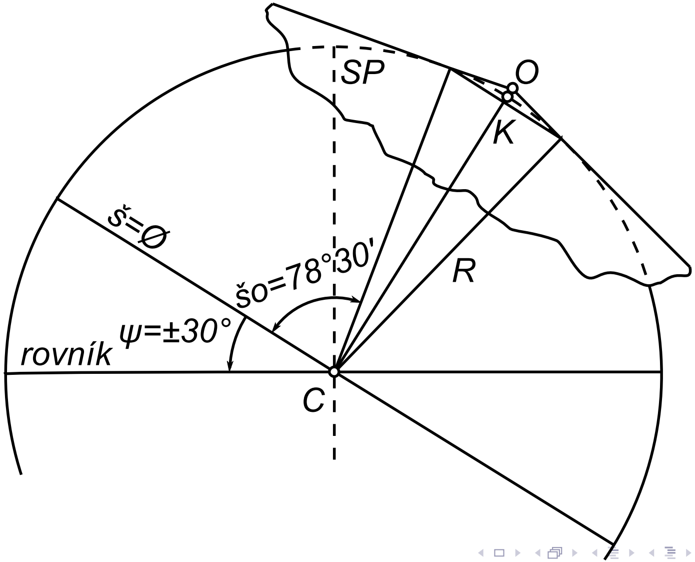
- vypočítané konstanty zobrazení:

$$\rho_0 = R \cot g\, \check{S}_0$$

$$n = \sin \check{S}_0$$

- délkové zkreslení by v tomto případě na základní rovnoběžce bylo $m = 1$ a v okrajových rovnoběžkách by bylo $m = 1,00024$

Křovákovo zobrazení – fáze III



Křovákovo zobrazení – fáze III

- protože byla snaha minimalizovat délkové zkreslení, tak byl vzorec pro ρ_0 přenásoben multiplikační konstantou $0,9999$
- upravené konstanty zobrazení:

$$\rho_0 = 0,9999\, R \operatorname{cotg} \check{S}_0 = 1298039,0046\, m$$

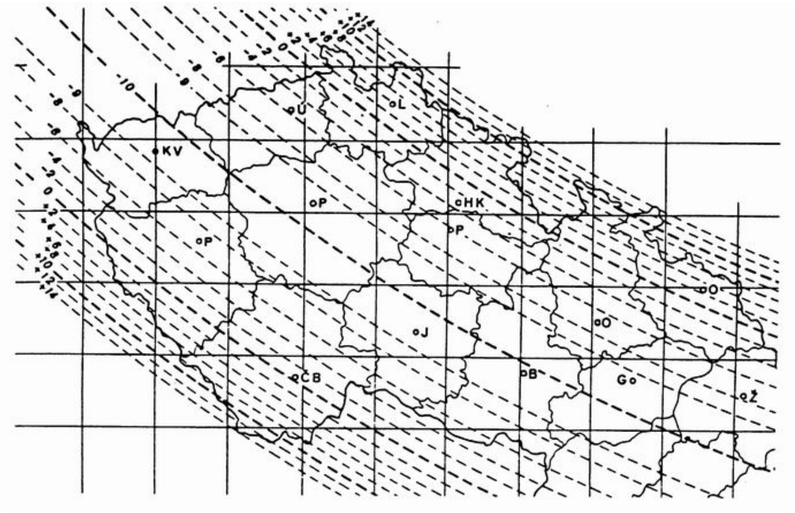
$$n = \sin \check{S}_0 = 0,9799247046$$

- délkové zkreslení je potom na základní rovnoběžce $m = 0,9999$ a v okrajových rovnoběžkách je $m = 1,00014$
- vzorec pro výpočet délkového zkreslení:

$$m = \frac{n\, \rho}{R\, \cos \check{S}}$$

- ekvideformáty mají tvar kartografických rovnoběžek (kruhových oblouků)

Křovákovo zobrazení – fáze III



Křovákovo zobrazení – fáze IV

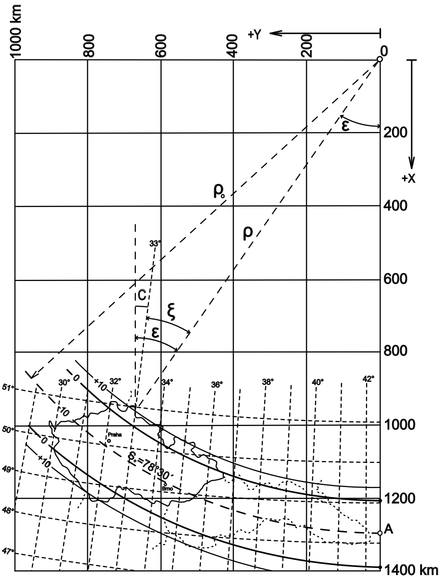
- počátek souřadnicového systému je v obrazu vrcholu kužele (padne do Estonského zálivu)
- aby bylo celé ČSR v prvním kvadrantu a obě souřadnice kladné:
  - osa X je obrazem základního poledníku $\lambda = 42^{\circ}30' v.F.$
  - kladná větev osy X jde na jih
  - osa Y je kolmá na osu X, kladná větev jde na západ
- převod polárních na pravoúhlé:

$$X = \rho \cos \varepsilon$$

$$Y = \rho \sin \varepsilon$$

- pro celé území ČSR platí, že $Y < X$
- nezvyklá orientace os dělá problémy v GIS

Křovákovo zobrazení – fáze IV



Křovákovo zobrazení – fáze IV

- osa X a zeměpisný poledník spolu svírají úhel – meridiánová konvergence (C)
- dle obrázku:

$$C = \varepsilon - \xi$$

- protože je zobrazení konformní, je možné ξ vypočítat pomocí sférické trigonometrie (viz obr. u fáze II)

$$\sin \xi = \frac{\cos U_k \sin D}{\cos U}$$

- přibližně také platí vzorec:

$$C = 0,008257\, Y + 2,373\, \frac{Y}{X}\, [km]$$

- meridiánová konvergence dosahuje v ČR až 10 stupňů !

- ukázka map v Křovákově zobrazení