Kartografie 1 - přednáška 4

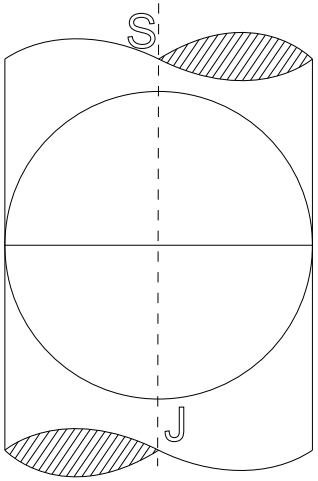
Jiří Cajthaml

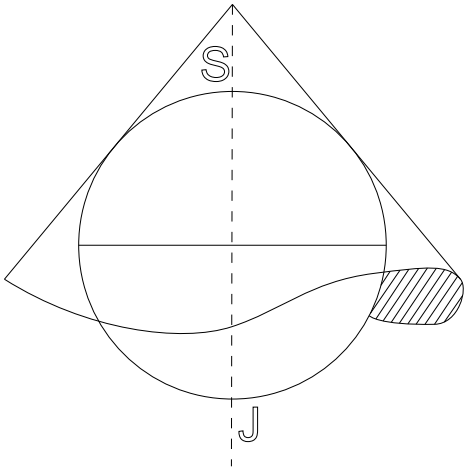
ČVUT v Praze, katedra geomatiky

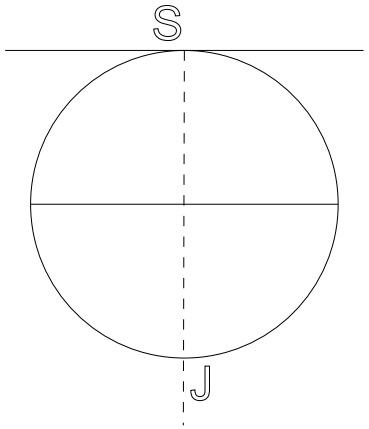
zimní semestr 2014/2015

Jednoduchá zobrazení

- zobrazení na rozvinutelné plochy
- zobrazujeme na plášť kužele nebo válce, který pak rozvineme do roviny, nebo přímo na rovinu
- **normální poloha** – osa kužele nebo válce je totožná s osou referenční plochy resp. se dotýká referenční plochy v zemském pólu

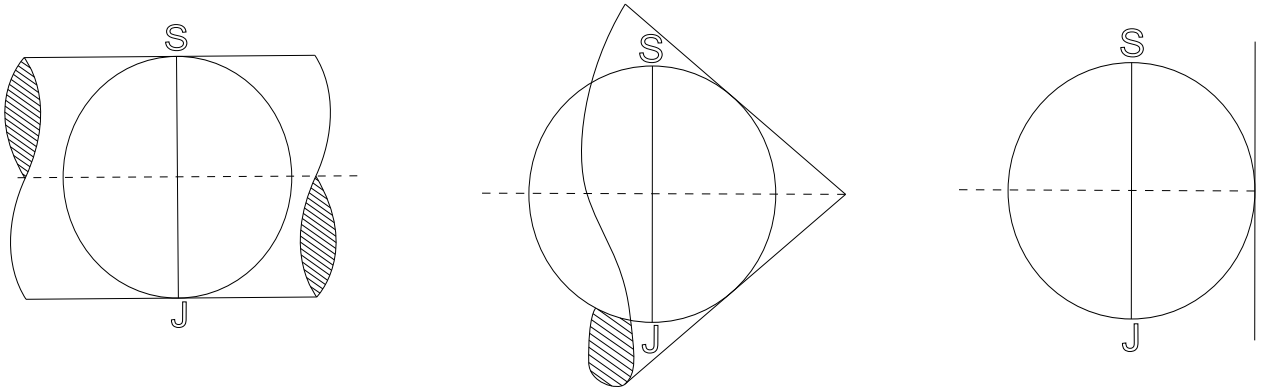




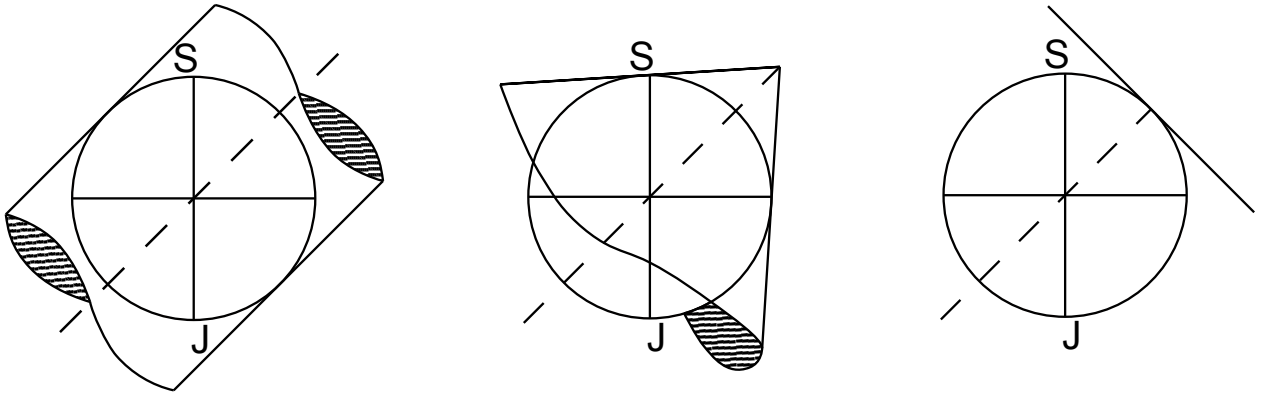


Jednoduchá zobrazení

- **příčná (transverzální) poloha** – osa kužele či válce leží v rovině rovníku a prochází středem Země, resp. dotykový bod zobrazovací roviny je na rovníku



- **obecná poloha** – osa kužele či válce jde středem Země, neprochází však ani pólem ani neleží v rovníku



Jednoduchá zobrazení

- zobrazovací rovnice, kde každá z rovinných souřadnic (polárních nebo pravoúhlých) se dají vyjádřit funkcemi pouze jedné souřadnice:

$$\rho = f(U) \ , \qquad \varepsilon = n \ V$$

$$X = n \ V \ , \qquad Y = g(U)$$

- jednoduchý tvar poledníků a rovnoběžek
- **poledníky**: svazek přímek nebo osnova rovnoběžných přímek
- **rovnoběžky**: soustava rovnoběžných (soustředných) kružnic nebo osnova rovnoběžných přímek
- dle tvaru zobrazovacích rovnic je jasné, že se nezkresluje úhel mezi poledníkem a rovnoběžkou (ortogonální zobrazení)
- všechna odvození se zpravidla provádějí pro normální polohu, pro ostatní polohy je třeba pracovat s kartografickými souřadnicemi

Kuželová zobrazení

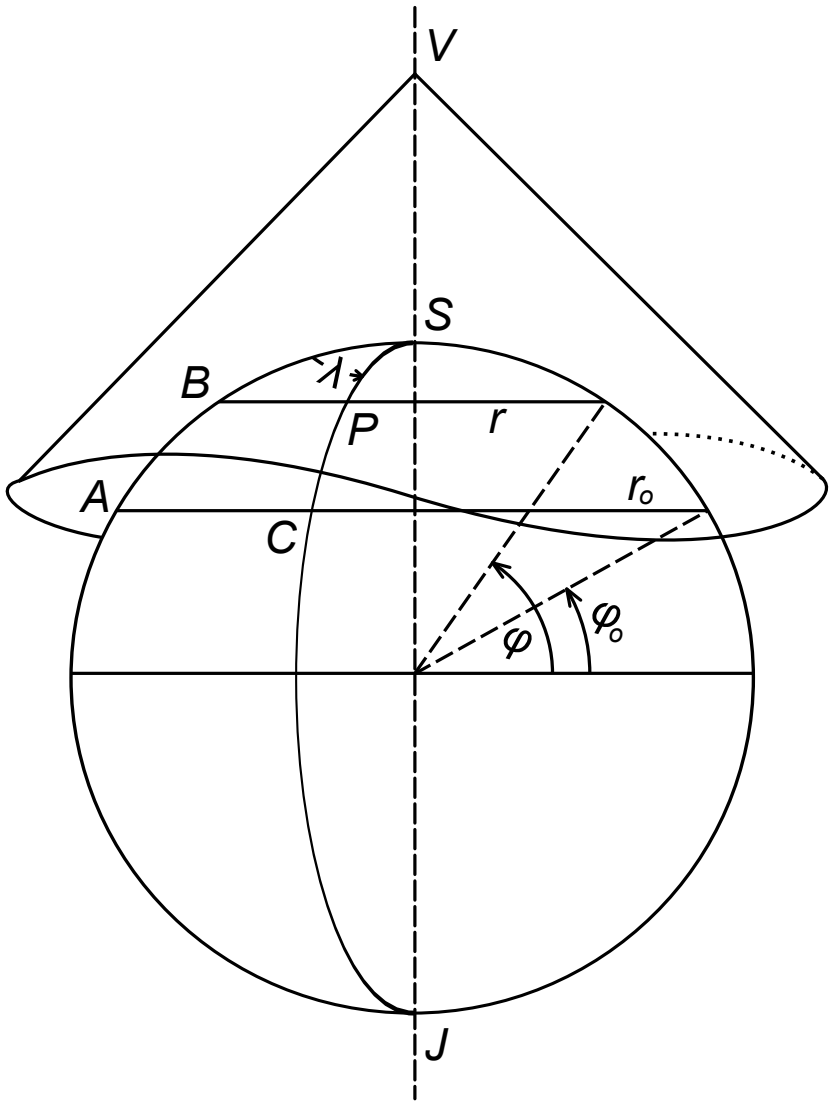
- obrazem poledníků jsou úsečky, které svírají menší úhly než ve skutečnosti
- obrazem rovnoběžek jsou části koncentrických kružnic, střed v pólu
- ekvideformáty jsou tvarem totožné s obrazy rovnoběžek
- vhodná pro protáhlá území kolem dotykové rovnoběžky
- symetrie kolem poledníku (stejné odlehlosti poledníků)
- obraz pólu: bod, část kružnice, nezobrazí se
- zobrazovací rovnice pro kouli:

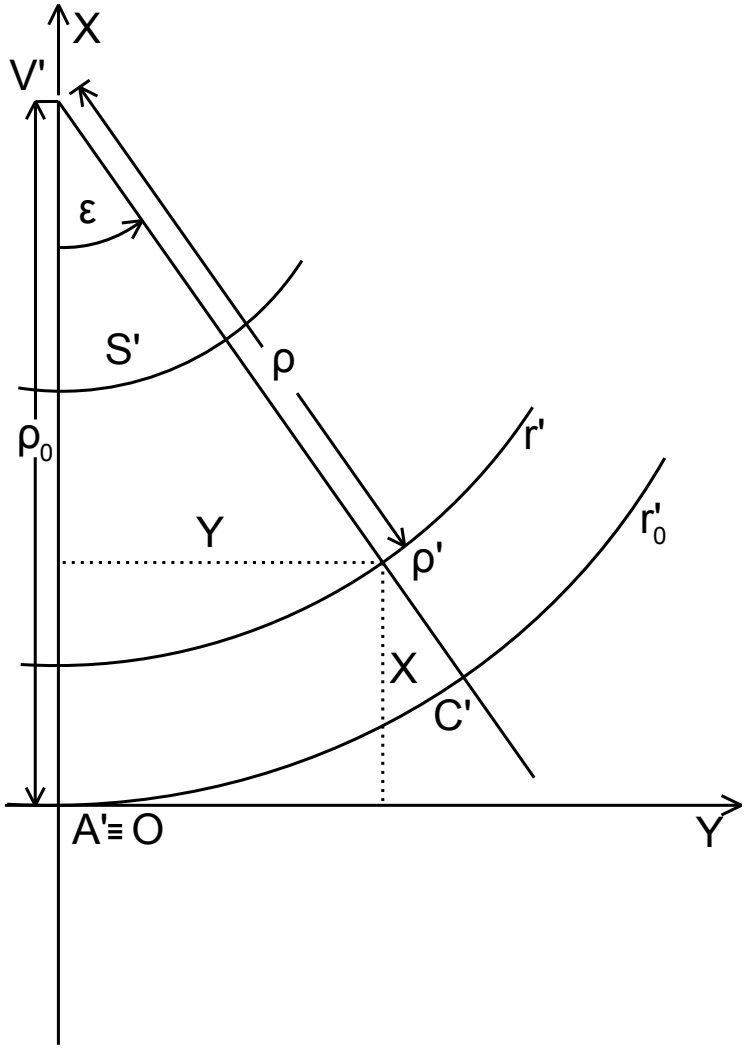
$$\rho = f(U) \ , \qquad \varepsilon = n \ V$$

$$\rho_0 = f(U_0) \ , \qquad \varepsilon = n \ V$$

$$\rho = \rho_0 + f(U_0 - U) \ , \qquad \varepsilon = n \ V$$

Kuželová zobrazení





Kuželová zobrazení

- konstanta n:
  - rozsah od 0 do 1
  - pro $n = 1$ přechází v azimutální zobrazení
- konstanta ρ_0:
  - poloměr nezkreslené rovnoběžky (U_0)
  - pro $U_0 = 0$ přechází ve válcové zobrazení
- hledáme funkci f, kterou odvodíme z požadavku na zkreslení

Kuželová zobrazení

- výchozí vztahy pro zkreslení:

$$m_p = -\frac{\mathrm{d}\rho}{R\mathrm{d}U}$$

$$m_r = \frac{\rho\ \mathrm{d}\varepsilon}{R\cos U\mathrm{d}V} = \frac{n\ \rho}{R\cos U}$$

$$P = m_p m_p$$

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{|m_p - m_r|}{m_p + m_r}$$

Kuželová zobrazení

1. ekvidistantní v polednících
2. konformní
3. ekvivalentní
4. kuželové projekce (moc se nepoužívají)

Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících

- známo již ve starém Řecku (Ptolemaiovo zobrazení)
- vzdálenosti obrazů rovnoběžek jsou stejné
- pól se zobrazí jako bod nebo jako část kružnice
- výchozí vztah:

$$m_p = -\frac{\mathrm{d}\rho}{R\mathrm{d}U} = 1$$

- zobrazovací rovnice:

$$\rho = \rho_0 + R(U_0 - U)\ , \qquad \varepsilon = n\ V$$

Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících

- vztahy pro zkreslení:

$$m_p = 1$$

$$m_r = P = \frac{n\ \rho}{R\ \cos U}$$

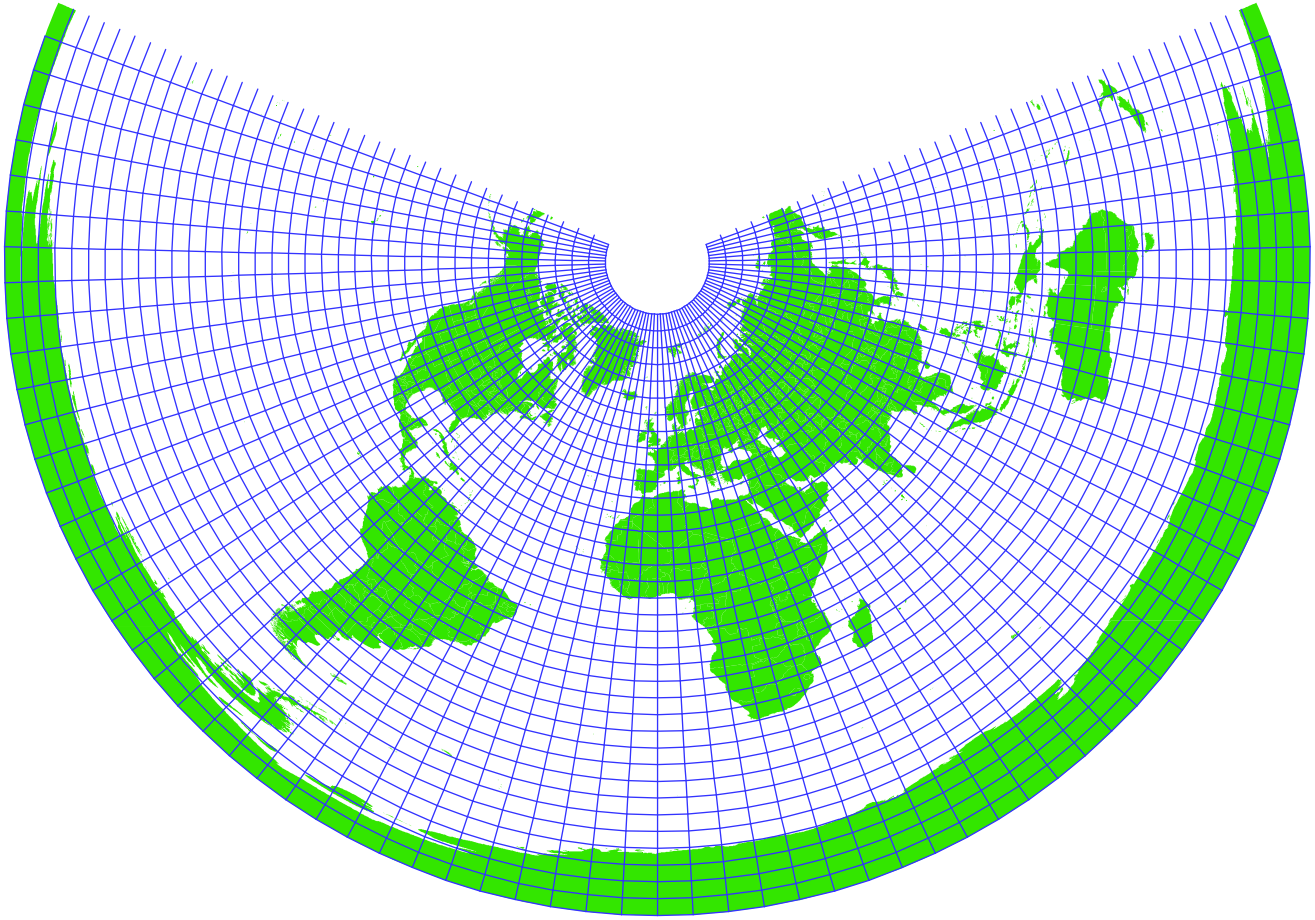
$$sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{|m_r - 1|}{m_r + 1}$$

Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících

- volba konstant n, U_0, ρ_0:
  - 1 nezkreslená rovnoběžka (Ptolemaiovo)
  - 2 nezkreslené rovnoběžky (de l'Isleovo)
  - pól se zobrazí jako bod

Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících – Ptolemaiovo

Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících – de l'Isleovo



Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících – Ptolemaiovo

- 1 nezkreslená rovnoběžka
- derivace vztahu pro délkové zkreslení v základní rovnoběžce musí být rovna nule (minimum):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U}\left\{\frac{n[\rho_0 + R\ (U_0 - U)]}{R\cos U}\right\}_{U_0} = 0$$

$$\frac{n}{R}\left\{\frac{-R\cos U\ +\ [\rho_0 + R\ (U_0 - U)]\sin U}{\cos^2\ U}\right\}_{U_0} = 0$$

$$\rho_0 = R\ cotg\ U_0$$

- zároveň zde musí být délkové zkreslení rovno jedné:

$$m_{r_0} = \frac{n\rho_0}{R\cos U_0} = 1$$

$$n = \sin U_0$$

Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících – Ptolemaiovo

- dále je možné volit nezkreslenou rovnoběžku U_0:
  - uprostřed zobrazovaného území

$$U_0 = \frac{U_s + U_j}{2}$$

  - tak, aby vliv zkreslení v okrajových rovnoběžkách byl stejný

$$m_{r_s} = m_{r_j}$$

- zkreslení neroste symetricky (k pólu rychleji)

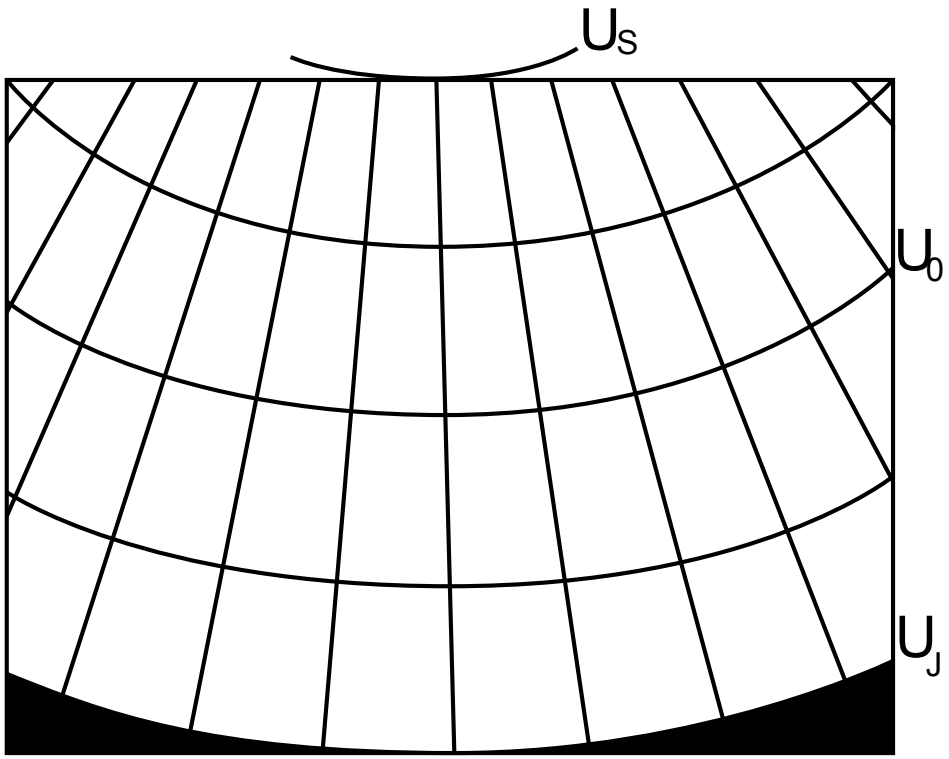
Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících – Ptolemaiovo

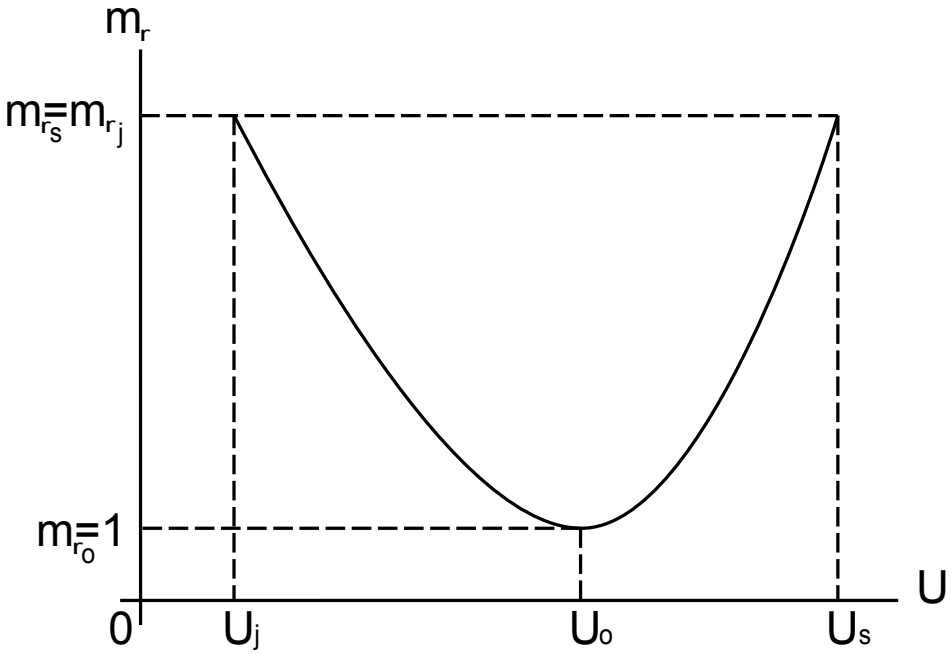
- řešení podmínky $m_{r_s} = m_{r_j}$:

$$\frac{n\,\rho_s}{R\,\cos U_s} = \frac{n\,\rho_j}{R\,\cos U_j}$$

$$cotg\,U_0 = \frac{(U_s \cos U_j - U_j \cos U_s)}{(\cos U_j - \cos U_s)} - U_0$$

Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících – Ptolemaiovo





Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících – de l'Isleovo

- 2 nezkreslené rovnoběžky

$$\frac{n\ \rho_1}{R\ \cos U_1} = \frac{n\ \rho_2}{R\ \cos U_2} = 1$$

$$n\,[\rho_o - R\ (U_1 - U_0)] = R\ \cos U_1$$

$$n\,[\rho_o - R\ (U_2 - U_0)] = R\ \cos U_2$$

$$n = \frac{\cos U_1 - \cos U_2}{U_2 - U_1}$$

$$\rho_0 = \frac{R\ [(U_2 - U_0)\cos U_1 - (U_1 - U_0)\cos U_2]}{\cos U_1 - \cos U_2}$$

Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících – de l'Isleovo

- dále je možné volit nezkreslené rovnoběžky U_1 a U_2:
  - libovolně a pak je možné vypočítat hodnotu U_0 (rovnoběžka s extrémním zkreslením):

$$cotg\, U_0 = \frac{(U_2 \cos U_1 - U_1 \cos U_2)}{(\cos U_1 - \cos U_2)} - U_0$$

  - tak, aby vliv zkreslení v okrajových rovnoběžkách byl stejný (poté hodnoty U_1 a U_2 nemůžu volit, ale vyjdou z výpočtu)

$$m_{r_s} = m_{r_j} = 1 + v$$

$$m_{r_0} = 1 - v$$

$$m_{r_s} + m_{r_0} = 2$$

Kuželové zobrazení ekvidistantní v poledníících – de l'Isleovo

- řešení podmínky $m_{r_s} = m_{r_j} = 1 + v$

$$n = \frac{2R \ \cos U_s \cos U_0}{\rho_s \cos U_0 + \rho_0 \cos U_s}$$

$$\rho_0 = \frac{R \ [(U_s - U_0) \cos U_j - (U_j - U_0) \cos U_s]}{\cos U_j - \cos U_s}$$

$$cotg\, U_0 = \frac{(U_s \cos U_j - U_j \cos U_s)}{(\cos U_j - \cos U_s)} - U_0$$

$$m_{r_1} = m_{r_2} = 1$$

$$\cos U_1 = n \left(\frac{\rho_0}{R} + (U_0 - U_1) \right)$$

Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících – pól je zobrazen jako bod

- dosadíme $U = 90^\circ$ do základní zobrazovací rovnice:

$$\rho = \rho_0 + R(U_0 - U)$$

$$\rho_{\boldsymbol{p}} = \rho_0 + R(U_0 - 90^\circ)$$

- po odečtení jako při klasickém odvození:

$$\rho = \rho_{\boldsymbol{p}} + R(90^\circ - U)$$

$$\rho = R(90^\circ - U)$$

$$\rho_0 = R(90^\circ - U_0)$$

- konstantu n určíme ze vztahu pro nezkreslenou rovnoběžku:

$$m_{r_0} = \frac{n\ \rho_0}{R\ \cos U_0} = 1$$

$$n = \frac{\cos U_0}{90^\circ - U_0}$$

Kuželové zobrazení ekvivalentní

- pól se zobrazí jako bod nebo jako část kružnice
- výchozí vztah:

$$P = m_p m_r = 1$$

$$-\frac{\mathrm{d}\rho}{R\ \mathrm{d}U}\ \frac{n\rho}{R\cos U} = 1$$

- zobrazovací rovnice:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + \frac{2R^2}{n}(\sin U_0 - \sin U)\ , \qquad \varepsilon = n\ V$$

Kuželové zobrazení ekvivalentní

- vztahy pro zkreslení:

$$m_p = \frac{R \cos U}{n\rho}$$

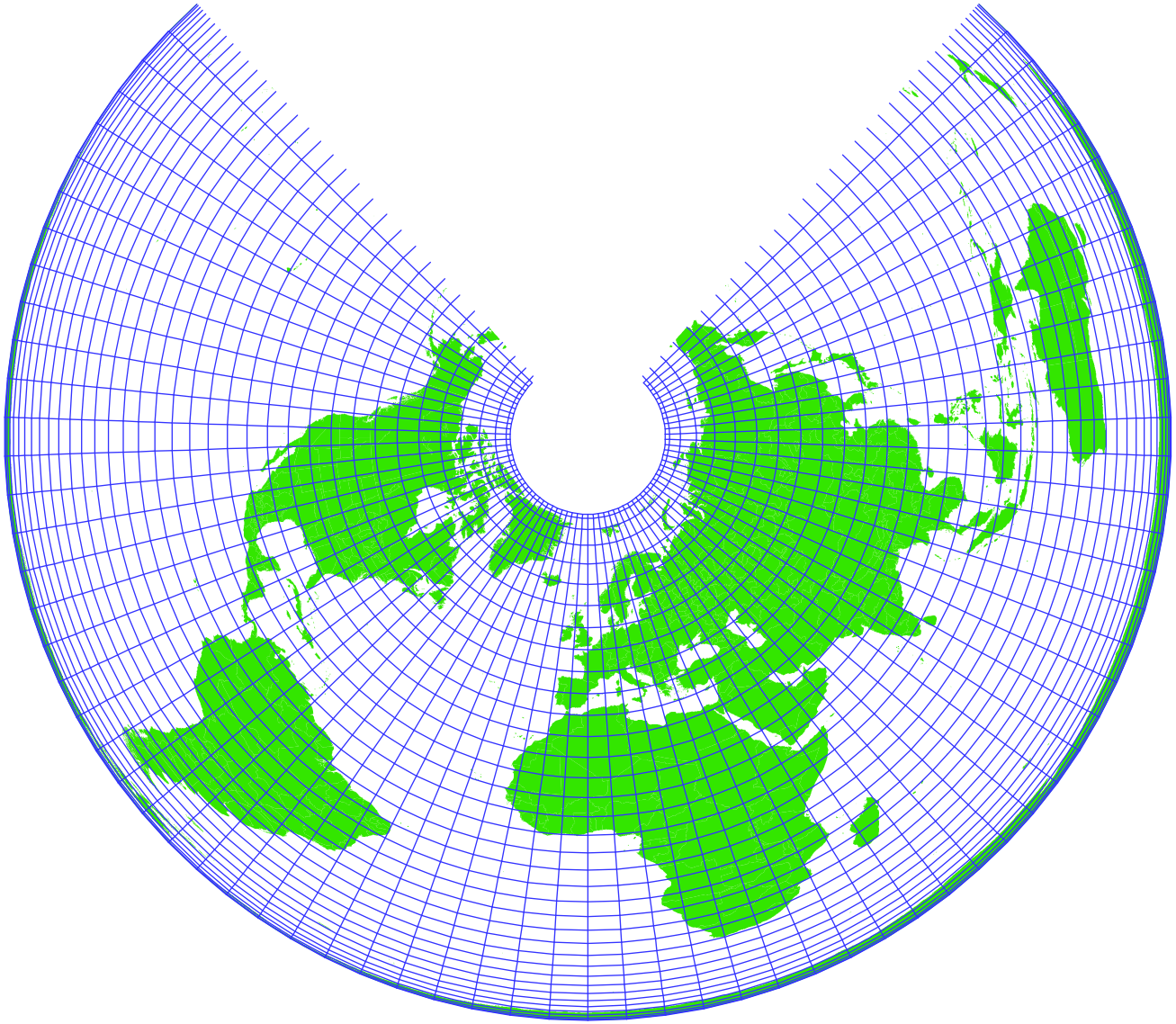
$$m_r = \frac{n\rho}{R \cos U}$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r^2 - 1}{m_r^2 + 1}$$

Kuželové zobrazení ekvivalentní

- volba konstant n, U_0, ρ_0:
  - 1 nezkreslená rovnoběžka
  - 2 nezkreslené rovnoběžky (Albersovo)
  - pól se zobrazí jako bod (Lambertovo)

Kuželové zobrazení ekvivalentní



Kuželové zobrazení ekvivalentní – 1NR

- 1 nezkreslená rovnoběžka
- analogicky jako u ekvidistantního zobrazení:

$$\rho_0 = R \ cotg \ U_0$$

$$n = \sin U_0$$

Kuželové zobrazení ekvivalentní – Albersovo

- 2 nezkreslené rovnoběžky

$$\frac{n\ \rho_1}{R\ \cos U_1} = \frac{n\ \rho_2}{R\ \cos U_2} = 1$$

$$n^2 \left[\rho_0^2 + \frac{2R^2}{n}(\sin U_0 - \sin U_1)\right] = R^2 \cos^2 U_1$$

$$n^2 \left[\rho_0^2 + \frac{2R^2}{n}(\sin U_0 - \sin U_2)\right] = R^2 \cos^2 U_2$$

$$n = \frac{\sin U_1 + \sin U_2}{2}$$

$$\rho_0^2 = \frac{R^2 \cos^2 U_1}{n^2} + \frac{2R^2}{n}(\sin U_1 - \sin U_0)$$

$$\rho_0 = \frac{R}{n}\sqrt{\cos^2 U_1 + 2n(\sin U_1 - \sin U_0)}$$

- volba nezkreslených rovnoběžek je analogická ekvidistantnímu zobrazení

Kuželové zobrazení ekvivalentní – Lambertovo

- dosadíme $U = 90^\circ$ do základní zobrazovací rovnice:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + \frac{2R^2}{n}(\sin U_0 - \sin U)$$

$$\rho_p^2 = \rho_0^2 + \frac{2R^2}{n}(\sin U_0 - 1)$$

- zobrazovací rovnice:

$$\rho = R\sqrt{\frac{2(1 - \sin U)}{n}}$$

$$\rho_0 = R\sqrt{\frac{2(1 - \sin U_0)}{n}}$$

- konstantu n určíme ze vztahu pro nezkreslenou rovnoběžku:

$$m_{r_0} = \frac{n\ \rho_0}{R\ \cos U_0} = 1$$

$$n = \frac{1 + \sin U_0}{2}$$

Kuželové zobrazení konformní

- pól se zobrazí jako bod
- výchozí vztah:

$$m_p = m_r$$

$$-\frac{\mathrm{d}\rho}{R\mathrm{d}U} = \frac{n\rho}{R\cos U}$$

- zobrazovací rovnice:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{U_0}{2} + 45^\circ\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right)} \right)^n, \qquad \varepsilon = n\ V$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2} + 45^\circ\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ\right)} \right)^n \left(\frac{(1 - e\sin\varphi_0)(1 + e\sin\varphi)}{(1 + e\sin\varphi_0)(1 - e\sin\varphi)} \right)^{\frac{ne}{2}}$$

Kuželové zobrazení konformní

- vztahy pro zkreslení:

$$m = m_p = m_r = \frac{n\rho}{R \cos U}$$

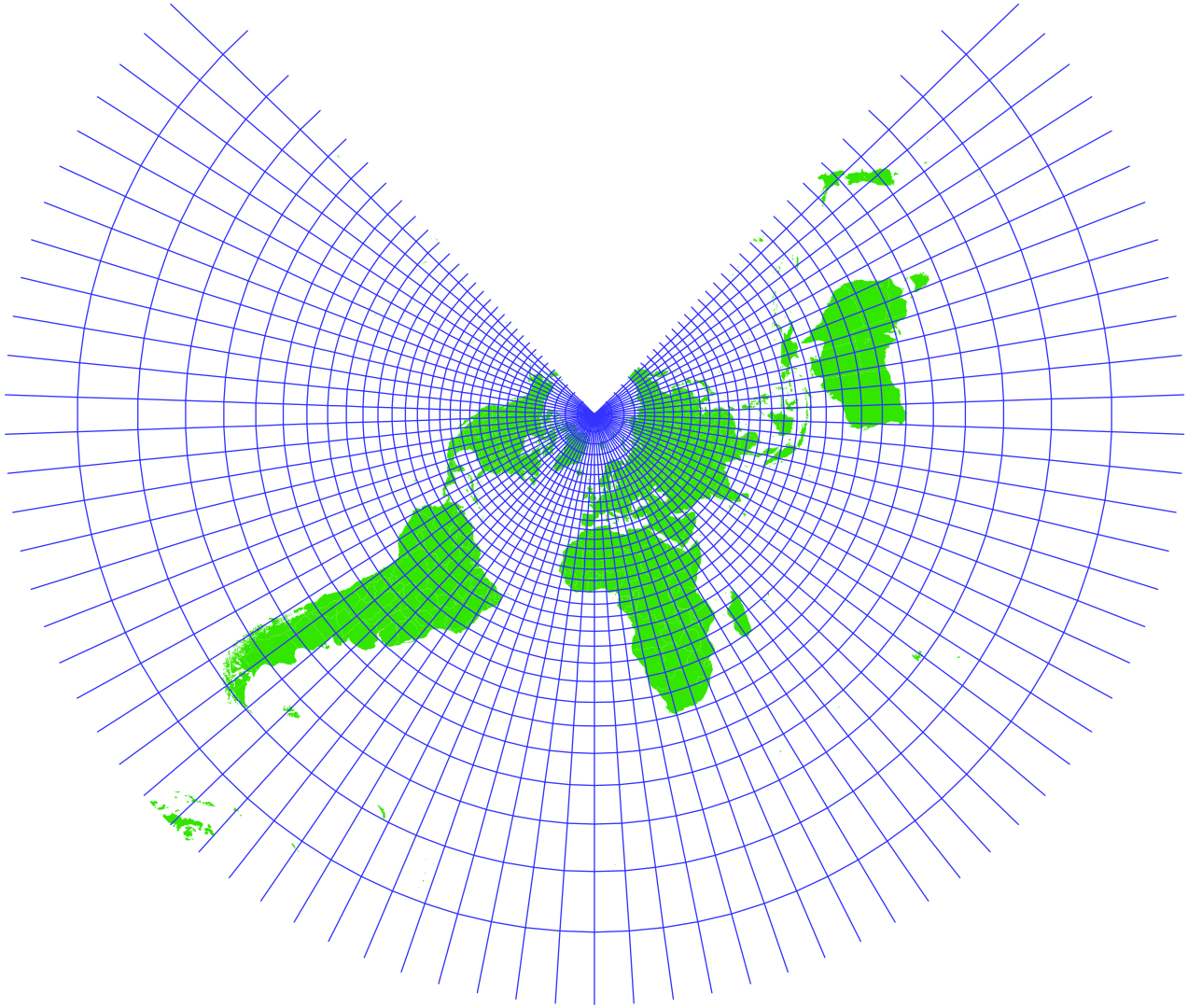
$$P = m^2$$

$$\Delta\omega = 0$$

Kuželové zobrazení konformní

- volba konstant n, U_0, ρ_0:
  - 1 nezkreslená rovnoběžka
  - 2 nezkreslené rovnoběžky (Lambertovo)

Kuželové zobrazení konformní



Kuželové zobrazení konformní – 1NR

- 1 nezkreslená rovnoběžka
- analogicky jako u ekvidistantního zobrazení:

$$\rho_0 = R \ cotg \ U_0$$

$$n = \sin U_0$$

- volba U_0 opět analogicky postupu u ekvidistantního zobrazení (skripta)

Kuželové zobrazení konformní – Lambertovo

- 2 nezkreslené rovnoběžky

$$\frac{n\ \rho_1}{R\ \cos U_1} = \frac{n\ \rho_2}{R\ \cos U_2} = 1$$

$$n = \frac{\ln\cos U_1 - \ln\cos U_2}{\ln \mathrm{tg}(\frac{U_2}{2} + 45^\circ) - \ln \mathrm{tg}(\frac{U_1}{2} + 45^\circ)}$$

$$\rho_0 = \frac{R\ \cos U_1}{n}\left(\frac{\mathrm{tg}(\frac{U_1}{2} + 45^\circ)}{\mathrm{tg}(\frac{U_0}{2} + 45^\circ)}\right)^n$$

- volba nezkreslených rovnoběžek je analogická ekvidistantnímu zobrazení (skripta)