Kartografie 1 - přednáška 3

Jiří Cajthaml

ČVUT v Praze, katedra geomatiky

zimní semestr 2014/2015

Třídění kartografických zobrazení

- lze třídit podle různých kritérií
- nejčastěji používaná kritéria:
  - podle kartografických zkreslení
  - podle obrazu zeměpisné sítě
- kartografická zobrazení dle zkreslení:
  - **ekvidistantní** (délkojevné), nezkreslují se délky v určitých směrech
  - **ekvivalentní** (plochojevné), nezkreslují se plochy
  - **konformní** (úhlojevné), nezkreslují se úhly
  - **vyrovnávací**, zkreslují vše, snaha o minimalizaci všech zkreslení

Třídění kartografických zobrazení

- kartografická zobrazení dle obrazu zeměpisné sítě:
  - **zobrazení z elipsoidu na kulovou plochu**
  - **jednoduchá zobrazení**
  - **nepravá zobrazení**
  - **polykónická zobrazení** (mnohokuželová)
  - **polyedrická zobrazení** (zobrazení po vymezených částech)
  - **neklasifikovaná zobrazení**
- kartografické zobrazení vzniklé geometrickou cestou se nazývá **kartografická projekce**

Zobrazení elipsoidu na kouli

- používá se pro mapy velkých měřítek (požadována přesná lokalizace bodů)
- poté jako druhý krok zobrazujeme kouli do roviny (**dvojité zobrazení**)
- pro mapy malých měřítek zpravidla postačuje použití referenční koule
- obecné zobrazovací rovnice:

$$U = f(\varphi, \lambda), \qquad V = g(\varphi, \lambda)$$

$$Q = f(q, \lambda), \qquad V = g(q, \lambda)$$

$$m^2 = \frac{R^2 \cos^2 U(\mathrm{d}Q^2 + \mathrm{d}V^2)}{N^2 \cos^2 \varphi(\mathrm{d}q^2 + \mathrm{d}\lambda^2)}$$

- další zkreslení by se odvozovala podobně jako při odvození zobrazení do roviny

Zobrazení elipsoidu na kouli

- zpravidla chceme, aby se zeměpisná síť zobrazovala opět jako zeměpisná síť:

$$U = f\ (\varphi), \qquad V = g\ (\lambda)$$

$$m_p = \frac{R\mathrm{d}U}{M\mathrm{d}\varphi}$$

$$m_r = \frac{R\cos U\ \mathrm{d}V}{N\cos\varphi\mathrm{d}\lambda}$$

$$P = m_p m_r$$

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p}$$

Zobrazení elipsoidu na kouli

1. se zachovanými zeměpisnými souřadnicemi
2. konformní zobrazení
3. promítnutím na soustřednou kouli
4. ekvidistantní v polednících
5. ekvidistantní v rovnoběžkách
6. ekvivalentní

Zobrazení se zachovanými zeměpisnými souřadnicemi

- prosté nahrazení elipsoidu koulí o vhodném poloměru R
- hodnoty zeměpisných souřadnic se zachovávají:

$$U = \varphi, \quad V = \lambda$$

- hodnoty zkreslení:

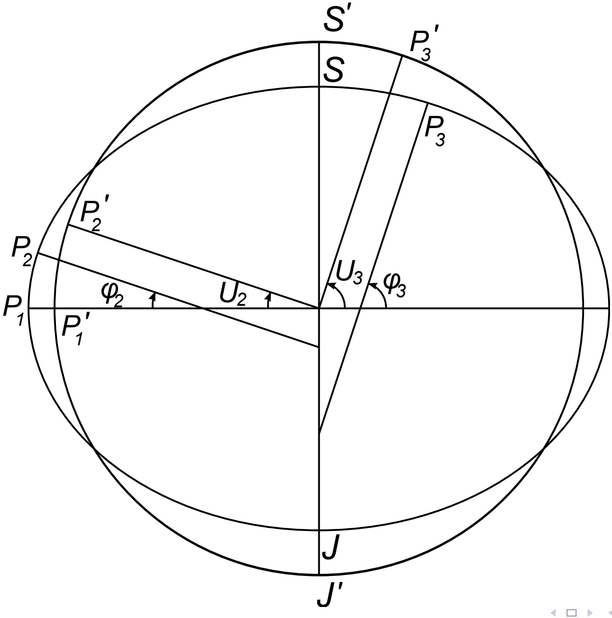
$$m_p = \frac{R\mathrm{d}U}{M\mathrm{d}\varphi} = \frac{R}{M}$$

$$m_r = \frac{R\cos U\mathrm{d}V}{N\cos\varphi\mathrm{d}\lambda} = \frac{R}{N}$$

$$P = m_p m_r = \frac{R^2}{MN}$$

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p} = \frac{M - N}{M + N}$$

- zkreslení jsou funkcí zeměpisné šířky a poloměru koule (R)


S'
S
P3'
P3
P2'
P2
P1
P1'
φ2
U2
U3
φ3
J
J'

Zobrazení se zachovanými zeměpisnými souřadnicemi

- možná volba poloměru R (viz přednáška 1)
- pro území kolem bodu o souřadnici φ_0 je ideální volba $R = \sqrt{M_0 N_0}$
- pro území podél rovnoběžky φ_0 je ideální volba $R = N_0$
- ekvideformáty mají shodný průběh jako rovnoběžky
- hodně velká délková zkreslení (až několik metrů na kilometr)

Konformní zobrazení

- musí být splněny podmínky konformity $m_p = m_r$, $p = 0$
- při odvození stačí uvažovat první podmínku (druhá je splněna tím, že zeměpisná síť se zobrazuje jako zeměpisná síť)

$$\frac{R \,\mathrm{d}U}{M \,\mathrm{d}\varphi} = \frac{R \,\cos U \,\mathrm{d}V}{N \cos\varphi \,\mathrm{d}\lambda}$$

- protože intervaly zeměpisné délky musí být symetrické:

$$\mathrm{d}V = \alpha \,\mathrm{d}\lambda$$

- odvození:

$$V = \alpha \,\lambda$$

$$\frac{R \,\mathrm{d}U}{M \,\mathrm{d}\varphi} = \frac{\alpha R \cos U}{N \cos\varphi}$$

Konformní zobrazení

- výsledné zobrazovací rovnice:

$$tg\left(\frac{U}{2}+45^\circ\right)=\frac{1}{k}\left(tg\left(\frac{\varphi}{2}+45^\circ\right)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{e/2}\right)^{\alpha}$$

$$V=\alpha\,\lambda$$

- zkreslení:

$$m=\frac{R\,\mathrm{d}U}{M\,\mathrm{d}\varphi}=\frac{\alpha R\cos U}{N\cos\varphi}$$

$$P=m^2=\left(\frac{\alpha R\cos U}{N\cos\varphi}\right)^2$$

$$\Delta\omega=0$$

- ekvideformáty mají shodný průběh jako rovnoběžky
- konstanty zobrazení α, k, R

Konformní zobrazení – volba konstant

- pokud má být zobrazení souvislé (celý elipsoid na celou kouli): $\alpha = 1$, $k = 1$, $R = a$
- pokud má být zobrazeneno pouze dílčí území mezi rovnoběžkami φ_J, φ_S (Gaussův způsob):
  - zvolí se základní rovnoběžka φ_0 (uprostřed území), která zůstane nezkreslená:

$$m_0 = \frac{\alpha \ R \ \cos U_0}{N_0 \ \cos \varphi_0} = 1$$

  - vzorec pro délkové zkreslení lze rozepsat Taylorovým rozvojem:

$$m = F(\varphi) = F(\varphi_0 + \Delta\varphi)$$

$$m = F(\varphi_0) + \Delta\varphi \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\varphi}/_{\Delta\varphi=0} + \frac{\Delta\varphi^2 \ \mathrm{d}^2 m}{2! \ \mathrm{d}\varphi^2}/_{\Delta\varphi=0} + \frac{\Delta\varphi^3 \ \mathrm{d}^3 m}{3! \ \mathrm{d}\varphi^3}/_{\Delta\varphi=0} + \ldots$$

Konformní zobrazení – volba konstant

- aby délkové zkreslení bylo co nejmenší, zvoleny 3 podmínky:

$$m_0 = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\varphi}/_{\Delta\varphi=0} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}\varphi^2}/_{\Delta\varphi=0} = 0$$

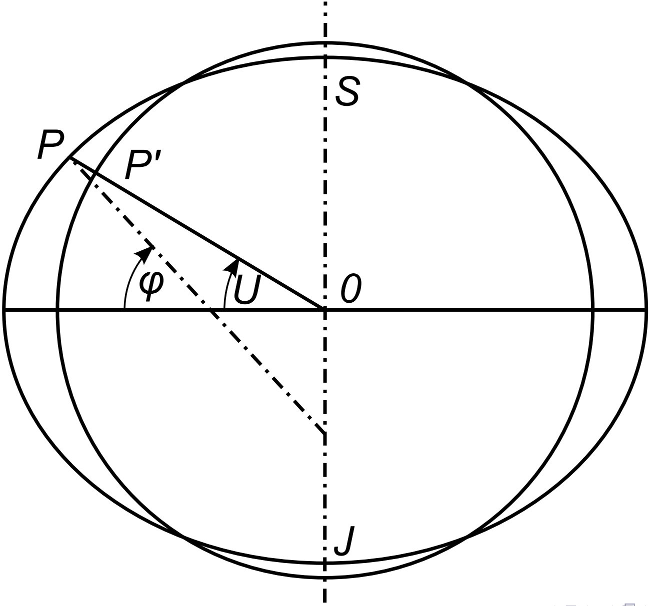
- z předchozích 3 podmínek lze určit 3 konstanty α, k, R a U_0:

$$\alpha^2 = 1 + \frac{e^2 \cos^4 \varphi_0}{1 - e^2}, \quad \sin\varphi_0 = \alpha \sin U_0$$

$$k = \frac{\mathrm{tg}^{\,\alpha}\left(\frac{\varphi_0}{2} + 45°\right)\left(\frac{1 - e \sin\varphi_0}{1 + e \sin\varphi_0}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}}{\mathrm{tg}\left(\frac{U_0}{2} + 45°\right)}$$

$$R = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2\varphi_0} = \sqrt{M_0 N_0}$$

Zobrazení promítnutím na soustřednou kouli



Zobrazení promítnutím na soustřednou kouli

- zobrazovací rovnice:

$$\operatorname{tg} U = \operatorname{tg} \beta = \left(1 - e^2\right) \operatorname{tg} \varphi$$

$$V = \lambda$$

- hodnoty zkreslení:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\varphi} = \left(1 - e^2\right) \frac{\cos^2 U}{\cos^2 \varphi}$$

$$m_p = \frac{R\left(1 - e^2\right) \cos^2 U}{M \cos^2 \varphi}$$

$$m_r = \frac{R \cos U}{N \cos \varphi}$$

$$P = m_p \, m_r \ ,$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p}$$

- poloměr koule je opět možné volit různými způsoby

Zobrazení ekvidistantní v polednících

- musí být splněna podmínka $m_p = 1$

$$m_p = \frac{R\,\mathrm{d}U}{M\,\mathrm{d}\varphi} = 1$$

$$\mathrm{d}U = \frac{M}{R}\mathrm{d}\varphi$$

- zobrazovací rovnice pokud zůstane nezkreslen rovník:

$$U = \frac{1}{R}\int\limits_0^{\varphi} M\mathrm{d}\varphi$$

$$V = \lambda$$

- pokud se má pól elipsoidu zobrazit jako pól koule:

$$R = \frac{\int\limits_0^{\pi/2} M\,\mathrm{d}\varphi}{\pi/2}$$

Zobrazení ekvidistantní v polednících

- hodnoty zkreslení:

$$m_p = 1$$

$$m_r = \frac{R \cos U}{N \cos \varphi}$$

$$P = m_r = \frac{R \cos U}{N \cos \varphi}$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - 1}{m_r + 1}$$

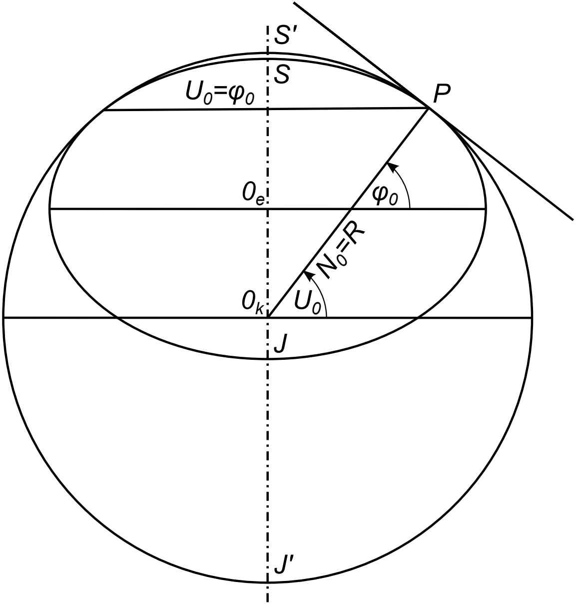
- dala by se použít i jiná volba nezkreslené rovnoběžky φ_0 než rovník:

$$U = U_0 + \frac{1}{R} \int_{\varphi_0}^{\varphi} M \mathrm{d}\varphi$$

$$V = \lambda$$

$$R = N_0$$

Zobrazení ekvidistantní v polednících



- musí být splněna podmínka $m_r = 1$

$$m_r = \frac{R \cos U}{N \cos \varphi} = 1$$

- rovník se musí zobrazit jako rovník ($R = a$)

$$\cos U = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

- zobrazovací rovnice:

$$\operatorname{tg} U = \sqrt{1 - e^2}\ \operatorname{tg} \varphi$$

$$V = \lambda$$

- hodnoty zkreslení

$$m_r = 1$$

$$m_p = P = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \cos^2 U}{M \cos^2 \varphi}$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1 - m_p}{1 + m_p}$$

Zobrazení ekvivalentní

- musí být splněna podmínka $P = 1$

$$P = m_p \, m_r = \frac{R^2 \cos U \;\mathrm{d}U \;\mathrm{d}V}{MN \cos\varphi \;\mathrm{d}\varphi \;\mathrm{d}\lambda} = 1$$

- zobrazovací rovnice (relativně složitá integrace):

$$R^2 \cos U \;\mathrm{d}U = MN \cos\varphi \;\mathrm{d}\varphi \;.$$

$$V = \lambda$$

- rovník se musí zobrazit jako rovník ($R = a$)
- hodnoty zkreslení

$$m_r = \frac{R \cos U}{M \cos\varphi}$$

$$m_p = \frac{M \cos\varphi}{R \cos U}$$

$$P = 1$$

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r^2 - 1}{m_r^2 + 1}$$