Kartografie 1 - přednáška 2

Jiří Cajthaml

ČVUT v Praze, katedra geomatiky

zimní semestr 2014/2015

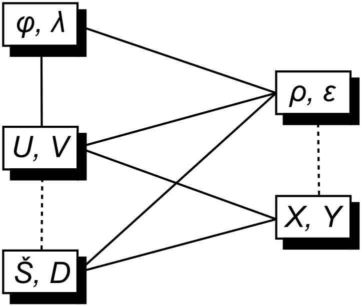
Kartografické zobrazení

- kartografické zobrazení
  - vzájemné přiřazení polohy bodů na dvou různých referenčních plochách
  - odvozeno matematickou cestou
  - existuje velké množství kartografických zobrazení (stovky)
- kartografická projekce
  - vztah je realizován geometrickou cestou (zpravidla z koule do roviny)
  - zpravidla známy velmi dlouho (starověk)
- kartografické zobrazení je popsáno zobrazovacími rovnicemi:

$$X = f(\varphi, \lambda)$$

$$Y = g(\varphi, \lambda)$$

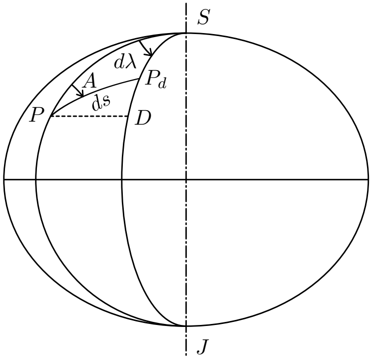
- vlastnosti:
  - souřadnice X, Y jsou obecně funkcí φ, λ
  - každému bodu v originále odpovídá jediný bod v obraze
  - singulární body – póly
- možné zobrazovací způsoby:

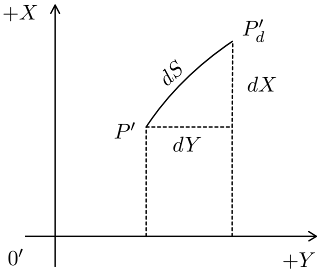


Kartografická zkreslení

- zkreslení jsou dána rozdílnou křivostí referenčních ploch
- typy zkreslení:
  - **délkové zkreslení – m** (poměr nekonečně malé délky v obraze a originále)
  - **plošné zkreslení – P** (poměr sobě odpovídajících nekonečně malých ploch v obraze a originále)
  - **úhlové zkreslení** (rozdíl velikostí úhlu v obraze a originále)
- protože délkové i úhlové zkreslení jsou bezrozměrná čísla (poměry), v praxi se používá:
  - **vliv délkového zkreslení – m-1**
  - **vliv plošného zkreslení – P-1** (moc se nepoužívá)
- typ zobrazení:
  - **ekvidistantní** (délkojevné), nezkreslují se délky v určitých směrech
  - **ekvivalentní** (plochojevné), nezkreslují se plochy
  - **konformní** (úhlojevné), nezkreslují se úhly

Délkové zkreslení





Délkové zkreslení – odvození

Výchozí vztahy:

$$m_A^2 = \frac{\mathrm{d}S^2}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2}{M^2 \mathrm{d}\varphi^2 + N^2 \cos^2\varphi \; \mathrm{d}\lambda^2}$$

$$\mathrm{d}X = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda \; , \qquad \mathrm{d}Y = \frac{\partial g}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial g}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda$$

$$\mathrm{d}X = f_\varphi \mathrm{d}\varphi + f_\lambda \mathrm{d}\lambda \; , \qquad \mathrm{d}Y = g_\varphi \mathrm{d}\varphi + g_\lambda \mathrm{d}\lambda$$

- Výsledky odvození:

$$m_A^2 = \frac{f_\varphi^2 + g_\varphi^2}{M^2}\cos^2 A + \frac{f_\lambda^2 + g_\lambda^2}{N^2\cos^2\varphi}\sin^2 A + \frac{2(f_\varphi f_\lambda + g_\varphi g_\lambda)}{MN\cos\varphi}\sin A\cos A$$

- pro $A = 0^\circ$ získáme **délkové zkreslení v poledníkovém elementu** m_p
- pro $A = 90^\circ$ získáme **délkové zkreslení v rovnoběžkovém elementu** m_r

$$m_A^2 = m_p^2\cos^2 A + m_r^2\sin^2 A + p\sin A\cos A$$

- délkové zkreslení je tedy závislé na poloze bodu (φ, λ) a směru (azimutu) A
- lze odvodit podmínky konformity zobrazení $m_p = m_r$, $p = 0$

Délkové zkreslení

- m se většinou blíží k jedné
- vliv délkového zkreslení: cm/km, dm/km
- $(m-1) > 0$ (zobrazení prodlužuje délky)
- $(m-1) < 0$ (zobrazení zkracuje délky)
- neexistuje zobrazení, které by nezkreslovalo všechny délky!

Extrémní délkové zkreslení, hlavní paprsky

- ve kterém azimutu dochází k extrémním hodnotám m_A?

$$\frac{\mathrm{d}m_A}{\mathrm{d}A} = 0$$

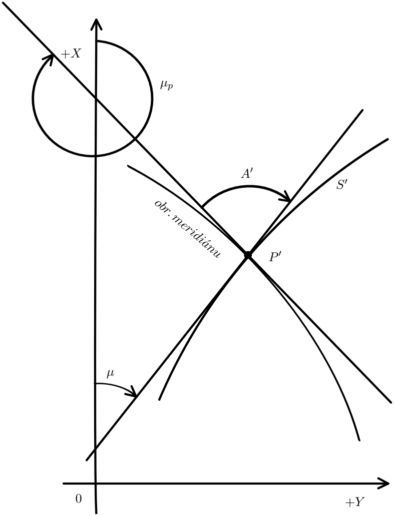
$$\frac{\mathrm{d}m_A^2}{\mathrm{d}A} = 2m_A \frac{\mathrm{d}m_A}{\mathrm{d}A} = 0$$

- výsledek po úpravách:

$$\mathrm{tg}\, 2A_\epsilon = \frac{p}{m_p^2 - m_r^2}$$

- rovnice má 2 řešení: $A_{\epsilon 1}$ a $A_{\epsilon 2} = A_{\epsilon 1} + 90^\circ$
  - dva paprsky o těchto azimutech jsou na sebe kolmé
  - jedná se o **hlavní směry** neboli **hlavní paprsky**
  - dosadíme-li hodnoty azimutů do základní rovnice pro délkové zkreslení, dostaneme hodnoty extrémního délkového zkreslení v bodě (značíme je **a**, **b**)
  - hlavní paprsky jsou na sebe kolmé v originále i obraze

Úhlové zkreslení – odvození



$$180^\circ - A' = 180^\circ + \mu_p - \mu$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - A') = \frac{\operatorname{tg}\mu_p - \operatorname{tg}\mu}{1 + \operatorname{tg}\mu_p \operatorname{tg}\mu}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{g_\varphi\,\mathrm{d}\varphi + g_\lambda\,\mathrm{d}\lambda}{f_\varphi\,\mathrm{d}\varphi + f_\lambda\,\mathrm{d}\lambda}$$

po úpravách:

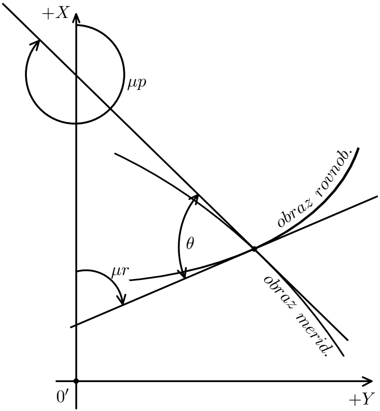
$$\operatorname{tg}\mu = \frac{g_\varphi\, N\cos\varphi\cos A + g_\lambda\, M\sin A}{f_\varphi\, N\cos\varphi\cos A + f_\lambda\, M\sin A}$$

$$\operatorname{tg}\,\mu_p = \frac{g_\varphi}{f_\varphi}$$

Úhlové zkreslení – odvození

zkreslení azimutu: $\Delta A = A' - A$

zkreslení úhlu: $\Delta\omega = (A_2' - A_1') - (A_2 - A_1) = \Delta A_2 - \Delta A_1$



$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{\mathrm{tg}\,\mu_p - \mathrm{tg}\,\mu_r}{1 + \mathrm{tg}\,\mu_p\ \mathrm{tg}\,\mu_r}$$

$$\mathrm{tg}\ \mu_p = \frac{g_\varphi}{f_\varphi}$$

$$\mathrm{tg}\ \mu_r = \frac{g_\lambda}{f_\lambda}$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{f_\lambda\, g_\varphi - f_\varphi\, g_\lambda}{f_\varphi\, f_\lambda + g_\varphi\, g_\lambda}$$

Úhlové zkreslení

- $\Delta\omega$ je funkcí azimutu
- pro obraz úhlu mezi poledníkem a rovnoběžkou platí předchozí vztah:

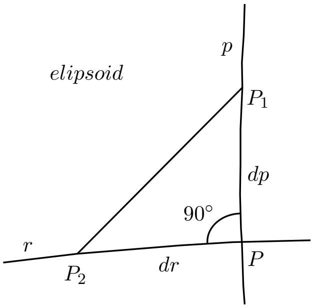
$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{f_\lambda\, g_\varphi - f_\varphi\, g_\lambda}{f_\varphi\, f_\lambda + g_\varphi\, g_\lambda}$$

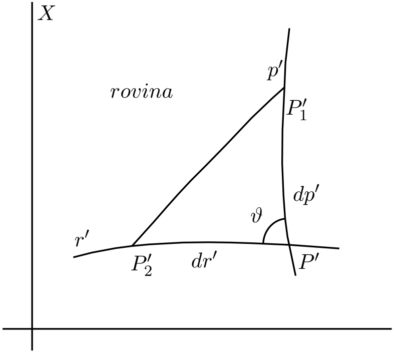
- jmenovatel předchozího vztahu je roven výrazu p ze základní rovnice pro délkové zkreslení, tedy pokud je roven nule (podmínka konformity), obraz úhlu je 90°, což odpovídá konformnímu zobrazení (úhel je nezkreslen)
- existují však i zobrazení, kde úhel mezi obrazem rovnoběžky a poledníku zůstává zachován a přesto nejsou konformní – nazýváme je ortogonálními

Extrémní úhlové zkreslení

- odvození je složitější (viz skripta)
- uvedeme si pouze výsledný vztah:

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{|b-a|}{b+a}$$


elipsoid
p
P_1
dp
90°
r
P_2
dr
P


X
rovina
p′
P'_1
dp′
ϑ
r′
P'_2
dr′
P′

Plošné zkreslení – odvození

výchozí vztah:

$$P = \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}p'\,\mathrm{d}r'\ \sin\vartheta}{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}r} = m_p\, m_r\ \sin\vartheta$$

můžeme dosadit za m_p, m_r (ze základní rovnice pro délkové zkreslení) a za $\sin\vartheta$:

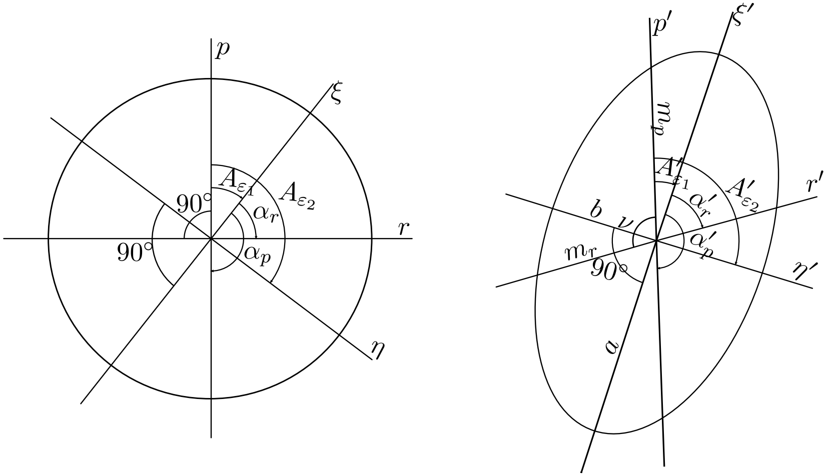
$$\sin\vartheta = \frac{f_\lambda g_\varphi - f_\varphi g_\lambda}{\sqrt{\left(f_\varphi^2 + g_\varphi^2\right)\left(f_\lambda^2 + g_\lambda^2\right)}}$$

$$P = \frac{f_\lambda g_\varphi - f_\varphi g_\lambda}{MN\cos\varphi}$$

Tissotova indikatrix

- délkové zkreslení v bodě je funkcí azimutu
- maximální a minimální hodnoty délkového zkreslení jsou a, b (hlavní paprsky)
- obrazem nekonečně malé kružnice je v důsledku zkreslení elipsa
  - elipsa zkreslení (Tissotova indikatrix)
  - znázorňuje průběh délkového zkreslení v bodě
  - pro konformní zobrazení se jedná o kružnici
  - a, b jsou velikosti hlavní a vedlejší poloosy elipsy
  - $A_{\epsilon 1}$ a $A_{\epsilon 2}$ jsou azimuty extrémních zkreslení
  - α_p a α_r jsou směry poledníku a rovnoběžky měřené od hlavního paprsku

Tissotova indikatrix



Tissotova indikatrix – vztahy

- délkové zkreslení

$$m_\alpha^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha$$

- úhlové zkreslení

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} A'_{\epsilon 1} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} A_{\epsilon 1}, \quad \operatorname{tg}(A'_{\epsilon 2} - A'_{\epsilon 1}) = \frac{b}{a} \operatorname{tg}(A_{\epsilon 2} - A_{\epsilon 1})$$

- obrazem nekonečně malé kružnice je v důsledku zkreslení elipsa
    - elipsa zkreslení (Tissotova indikatrix)
    - znázorňuje průběh délkového zkreslení v bodě
    - pro konformní zobrazení se jedná o kružnici
    - a, b jsou velikosti hlavní a vedlejší poloosy elipsy
    - $A_{\epsilon 1}$ a $A_{\epsilon 2}$ jsou azimuty extrémních zkreslení
    - α_p a α_r jsou směry poledníku a rovnoběžky měřené od hlavního paprsku

Tissotova indikatrix – vztahy

- plošné zkreslení

$$P = \frac{\pi \;\, a \,\mathrm{d}\rho \;\, b \,\mathrm{d}\rho}{\pi \;\, \mathrm{d}\rho^2} = a \;\, b$$

- vztahy mezi hlavními paprsky:

$$a \;\, b = m_p \;\, m_r \;\; \sin\vartheta$$

$$m_p^2 = a^2 \cos^2\alpha_p + b^2 \sin^2\alpha_p$$
$$m_r^2 = a^2 \sin^2\alpha_p + b^2 \cos^2\alpha_p$$

tedy:

$$a^2 + b^2 = m_p^2 + m_r^2$$