

# Kartografie 1 - přednáška 1

Jiří Cajthaml

ČVUT v Praze, katedra geomatiky

zimní semestr 2014/2015

- přednášky, cvičení, zápočty, zkoušky
- Jiří Cajthaml (přednášky, cvičení)
- potřebné znalosti:
  - vzorce pro trigonometrické funkce
  - sférická a rovinná trigonometrie
  - diferenciální a integrální počet
  - rozvoj vzorců v řadu (Taylorův rozvoj)
  - Matlab
  - základy teoretické geodézie (úlohy na elipsoidu)

- „umění, věda a technologie vytváření map, včetně jejich studia jako vědeckých a uměleckých prací“
- návaznost na řadu dalších oborů (geodézie, geografie, . . .)
- lze dělit na více podoborů podle různých hledisek
- základním kamenem je „matematická kartografie“
  - teorie zobrazování referenční plochy zemského povrchu do roviny mapy
  - vlastnosti a praktická užití kartografických zobrazení
  - kartografická zkresení

- tvar Země je nepravidelný, členitý, nelze matematicky popsat
- pro účely kartografie se tvar Země nahrazuje **referenční plochou**
- vlastnosti referenční plochy:
  - její tvar a velikost jsou podobné tvaru Země
  - je matematicky snadno definovatelná
  - nahrazuje buď celou Zemi, nebo její část
- referenční plochy:
  - geoid
  - elipsoid
  - koule
  - rovina

- v geodézii a kartografii – dvouosý rotační elipsoid
- 2 parametry:
  - velká poloosa ( $a$ ), malá poloosa ( $b$ )
  - excentricita ( $e$ )
  - zploštění ( $f$ )

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$$

$$f = (a - b)/a$$

- **Besselův elipsoid:**

$$a = 6\,377\,397,155 \text{ m ,}$$

$$b = 6\,356\,078,963 \text{ m ,}$$

$$e^2 = 0,006\,674\,3722 \text{ ,}$$

$$f^{-1} = 299,152\,813 \text{ .}$$

- **elipsoid WGS84:**

$$a = 6\,378\,137 \text{ m ,}$$

$$b = 6\,356\,752,314 \text{ m ,}$$

$$e^2 = 0,006\,694\,3800 \text{ ,}$$

$$f^{-1} = 298,257\,22 \text{ .}$$

- konstantní křivost, snadnější výpočty
- použití pro mapy malých a středních měřítek
- 1 parametr:
  - poloměr ( $R$ )

- **volba poloměru:**

$$R = a,$$

$$R = b,$$

$$R = \sqrt{MN},$$

$$R = \sqrt[3]{a^2 b} \text{ (stejný objem),}$$

$$R = (2a + b)/3,$$

...

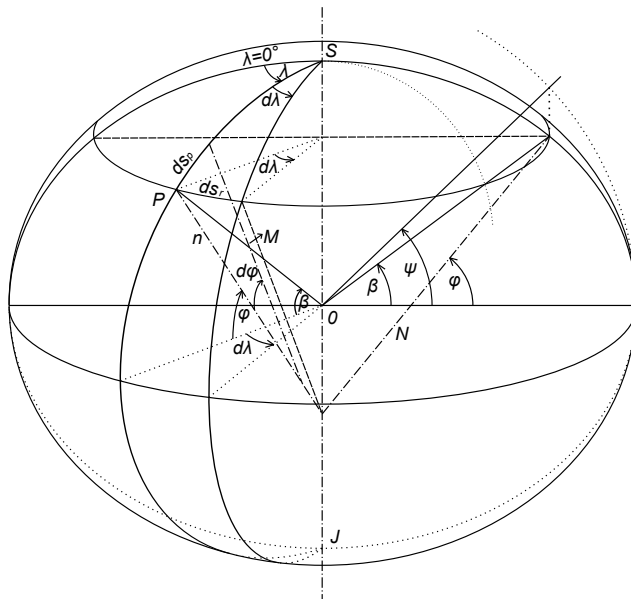
- tečná rovina ve zvoleném bodě
- použití pro malá území do průměru 20 km
- nulová křivost
- nelze použít pro mapy malých a středních měřítek
- vliv zanedbání křivosti Země pro polohopisné a výškopisné práce (viz předmět Geodézie) . . .

# Souřadnicové soustavy na referenčním elipsoidu

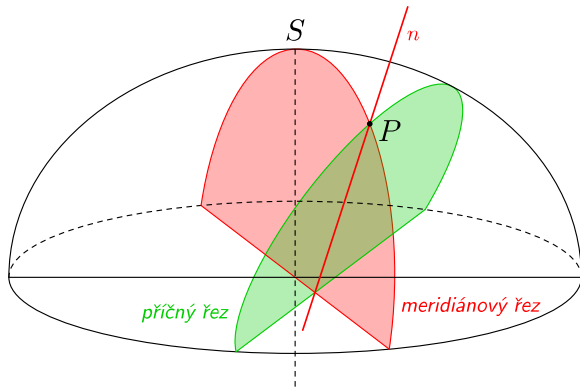
- zeměpisné souřadnice ( $\varphi, \lambda$ )
- geocentrická šířka ( $\beta$ )
- redukovaná šířka ( $\psi$ )
- pravoúhlé souřadnice ( $X, Y, Z$ )
  
- převod mezi zeměpisnými a pravoúhlými souřadnicemi – teoretická geodézie
- **zeměpisná šířka** (na elipsoidu  $\varphi$ , na kouli  $U$ )
  - úhel mezi normálou v bodě a rovinou rovníku
  - $0^\circ$  až  $90^\circ$  na severní polokouli
  - $0^\circ$  až  $-90^\circ$  na jižní polokouli
- **zeměpisná délka** (na elipsoidu  $\lambda$ , na kouli  $V$ )
  - úhel mezi rovinou místního poledníku a rovinou základního poledníku
  - $0^\circ$  až  $180^\circ$  na východní polokouli
  - $0^\circ$  až  $-180^\circ$  na západní polokouli



# Souřadnicové soustavy



# Normálové řezy



- **rovnoběžka** – konstatní zeměpisná šířka
- **poledník** (meridián) – konstatní zeměpisná délka
- **rovník** –  $\varphi = 0^\circ$  resp  $U = 0^\circ$
- **zeměpisné póly** –  $\varphi = \pm 90^\circ$  resp  $U = \pm 90^\circ$
  
- geocentrická šířka

$$\operatorname{tg} \beta = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi$$

- redukovávaná šířka

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi$$

- na elipsoidu

$$ds_p = M d\varphi$$

$$ds_r = N \cos \varphi d\lambda$$

- na kouli

$$ds_p = R dU$$

$$ds_r = R \cos U dV$$

hlavní poloměry křivosti:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

# Izometrické souřadnice

- zeměpisné souřadnice nejsou symetrické (izometrické)

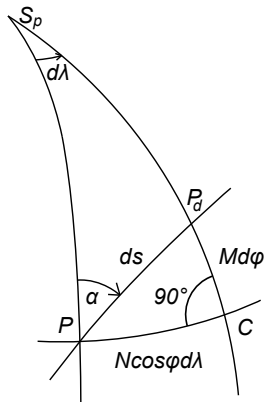
$$ds^2 = f(\xi, \eta) \cdot (d\xi^2 + d\eta^2)$$

- $f$  je libovolná funkce

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

$$dq = \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi$$

$$q = \int_0^\varphi \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}$$



$$q = \ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + 45^\circ \right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

$$Q = \int_0^U \frac{dU}{\cos U} = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{U}{2} + 45^\circ \right)$$

- aby se obraz referenční plochy (např. plášť kužele) co nejlépe přimykal v dané oblasti k referenční ploše
- osa zobrazovací plochy není rovnoběžná se zemskou osou
- souřadnice jsou vztaženy ke **kartografickému pólu (K)**
- **kartografická šířka**
  - definována analogicky jako zeměpisná šířka
  - měří se od kartografického rovníku
- **kartografická délka**
  - definována analogicky jako zeměpisná délka
  - měří se od zeměpisného poledníku procházejícího kartografickým pólem
- je-li kartografický pól na zeměpisném rovníku – zobrazení v **transverzální poloze**
- je-li kartografický pól jinde – zobrazení v **obecné poloze**





# Vztahy mezi kartografickými a zeměpisnými souř.

- snadno řešitelné pouze na referenční kouli
- sférická trigonometrie
  - sférický trojúhelník je tvořen úseky třech hlavních kružnic
  - $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in (0^\circ, 180^\circ)$
  - součet libovolných dvou stran je větší než strana třetí
  - proti stejným stranám leží stejné úhly, proti větší straně leží větší úhel
  - součet všech stran je menší než  $360^\circ$ , tj.  $a + b + c < 360^\circ$
  - součet všech úhlů je větší než  $180^\circ$  a menší než  $540^\circ$ , tj.  $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$
  - rozdíl mezi součtem všech úhlu sférického trojúhelníku a úhlem přímým se nazývá *exces sférického trojúhelníku (nadbytek)*, značí se  $e$ , tj.  $e = a + b + c - 180^\circ$

# Vztahy sférické trigonometrie

- sinová věta

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

- kosinová věta pro stranu

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

- kosinová věta pro úhel

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

- Neperovy analogie

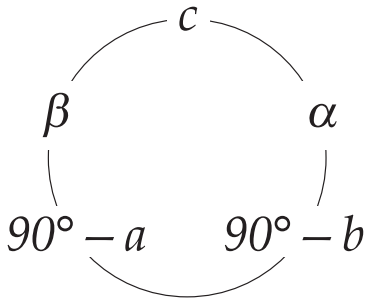
$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos(\frac{a-b}{2})}{\cos(\frac{a+b}{2})} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$$

# Neperovo pravidlo pro pravoúhlý trojúhelník

Do kruhového schématu zapíšeme nejprve přeponu  $c$ , po stranách přilehlé úhly  $\alpha, \beta$  a proti nim rozdíly  $90^\circ - a$ ,  $90^\circ - b$ , kde  $a, b$  jsou odvěsny pravoúhlého trojúhelníku. Dle Neperova pravidla platí:

- kosinus každého prvku v kruhovém schématu je roven součinu sinů protilehlých prvků
- kosinus každého prvku v kruhovém schématu je roven součinu kotangent sousedních prvků.



# Vztahy mezi kartografickými a zeměpisnými souř.

- dle předchozích vztahů
- převod  $U, V$  na  $\check{S}, D$

$$\sin \check{S} = \sin U_k \sin U + \cos U_k \cos U \cos \Delta V$$

$$\sin D = \frac{\sin \Delta V \cos U}{\cos \check{S}}$$

- převod  $\check{S}, D$  na  $U, V$

$$\sin U = \sin \check{S} \sin U_k - \cos \check{S} \cos U_k \cos D$$

$$\sin \Delta V = \frac{\sin D \cos \check{S}}{\cos U}$$

- pravoúhlé souřadnice  $X, Y$ 
  - počátek volen do obrazu kartografického pólu nebo do průsečíku obrazu základního poledníku a rovníku
  - orientace os může být různá (matematická, EN, speciální (JTSK))
  - někdy využito adičních konstant (zejména kvůli záporným souřadnicím)
- polární souřadnice  $\rho, \varepsilon$ 
  - používají se u kuželových a azimutálních zobrazení (snadnější zobrazovací rovnice)
  - $\rho$  je průvodič (eukleidovská vzdálenost od počátku)
  - $\varepsilon$  je úhel průvodiče měřený od rovnoběžky s osou  $X$

# Důležité křivky na kouli a elipsoidu

- **geodetická křivka** (na elipsoidu) - viz teoretická geodézie
- **ortodroma** (na kouli) - angl. great circle
- **loxodroma** - angl. rhumb line
  
- důležité v navigaci
- ve vybraných zobrazeních se zobrazují jako přímky

- křivka, která protíná poledníky pod stále stejným azimutem
- zpravidla se řeší na kouli
- spirálovitě se blíží k pólům
- obecná křivka (kromě vybraných zobrazení)
- Mercatorovo zobrazení (konformní válcové) – loxodroma  
přímka
- využití: letecká, námořní doprava (dnes nahrazeno GNSS)

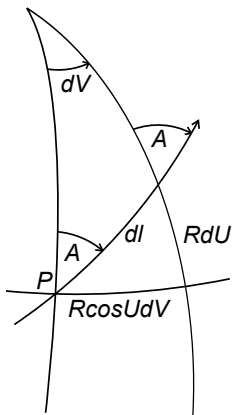
# Loxodroma, odvození

- počáteční bod  $P$
- azimut loxodromy  $A$  (konstanta)
- délka loxodromy  $dl$
- odvození:

$$\operatorname{tg} A = \frac{R \cos U \, dV}{R \, dU}$$

$$dV = \operatorname{tg} A \frac{dU}{\cos U}$$

$$V_2 - V_1 = \operatorname{tg} A \left( \ln \operatorname{tg} \left( \frac{U_2}{2} + 45^\circ \right) - \ln \operatorname{tg} \left( \frac{U_1}{2} + 45^\circ \right) \right)$$





- délka loxodromy  $dl$
- odvození:

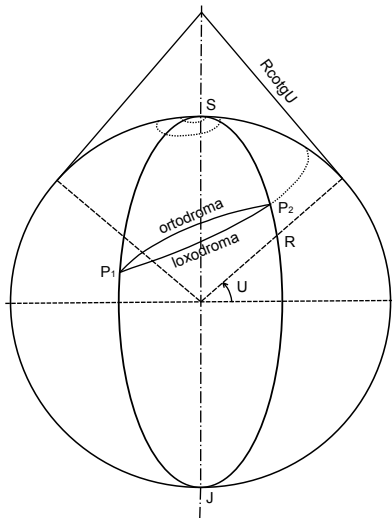
$$dl = \frac{R dU}{\cos A}$$

$$l_{12} = \frac{R}{\cos A} (U_2 - U_1)$$

- loxodroma probíhá vždy vzdálenějšími místy od pólu než ortodroma

- nejkratší spojnice dvou bodů na referenční kouli (geodetická křivka na kouli)
- protíná poledníky pod různými azimuty
- vrací se do bodu ze kterého vychází
- jedná se o hlavní kružnici (střed kružnice je ve středu koule)
- její délka je vždy kratší než délka loxodromy
- gnómonická projekce – ortodroma přímka
- využití: geodézie, letecká nebo námořní doprava

# Porovnání loxodromy a ortodromy





# Řešení ortodromy

- sférický trojúhelník
- dále platí  
Clairautova věta

$$\cos U \sin A = \cos U_{max}$$

a tedy

$$U_K = 90^\circ - U_{max} = A_o$$

$$V_K = V_{max} + 180^\circ$$

