Kartografie 1 - přednáška 1

Jiří Cajthaml

ČVUT v Praze, katedra geomatiky

letní semestr 2021/2022

Úvod

- přednášky, cvičení, zápočty, zkoušky
- Jiří Cajthaml (přednášky, cvičení)
- potřebné znalosti:
  - vzorce pro trigonometrické funkce
  - sférická a rovinná trigonometrie
  - diferenciální a integrální počet
  - rozvoj vzorců v řadu (Taylorův rozvoj)
  - Matlab
  - základy teoretické geodézie (úlohy na elipsoidu)

Kartografie

- umění, věda a technologie vytváření map, včetně jejich studia jako vědeckých a uměleckých prací
- návaznost na řadu dalších oborů (geodézie, geografie, . . .)
- lze dělit na více podoborů podle různých hledisek
- základním kamenem je matematická kartografie
  - teorie zobrazování referenční plochy zemského povrchu do roviny mapy
  - vlastnosti a praktická užití kartografických zobrazení
  - kartografická zkreslení

Referenční plochy používané v kartografii

- tvar Země je nepravidelný, členitý, nelze matematicky popsat
- pro účely kartografie se tvar Země nahrazuje **referenční plochou**
- vlastnosti referenční plochy:
  - její tvar a velikost jsou podobné tvaru Země
  - je matematicky snadno definovatelná
  - nahrazuje buď celou Zemi, nebo její část
- referenční plochy:
  - geoid
  - elipsoid
  - koule
  - rovina

Elipsoid

- v geodézii a kartografii – dvouosý rotační elipsoid
- 2 parametry:
  - velká poloosa (a), malá poloosa (b)
  - excentricita (e)
  - zploštění (f)

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$$

$$f = (a - b)/a$$

  - **Besselův elipsoid:**
    $a = 6\ 377\ 397{,}155$ m ,
    $b = 6\ 356\ 078{,}963$ m ,
    $e^2 = 0{,}006\ 674\ 3722$,
    $f^{-1} = 299{,}152\ 813$.
  - **elipsoid WGS84:**
    $a = 6\ 378\ 137$ m ,
    $b = 6\ 356\ 752{,}314$ m ,
    $e^2 = 0{,}006\ 694\ 3800$,
    $f^{-1} = 298{,}257\ 22$.

Koule

- konstantní křivost, snadnější výpočty
- použití pro mapy malých a středních měřítek
- 1 parametr:
  - poloměr (R)
- **volba poloměru:**

$$
\begin{aligned}
R &= a, \\
R &= b, \\
R &= \sqrt{MN}, \\
R &= \sqrt[3]{a^2 b} \text{ (stejný objem)}, \\
R &= (2a + b)/3, \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Rovina

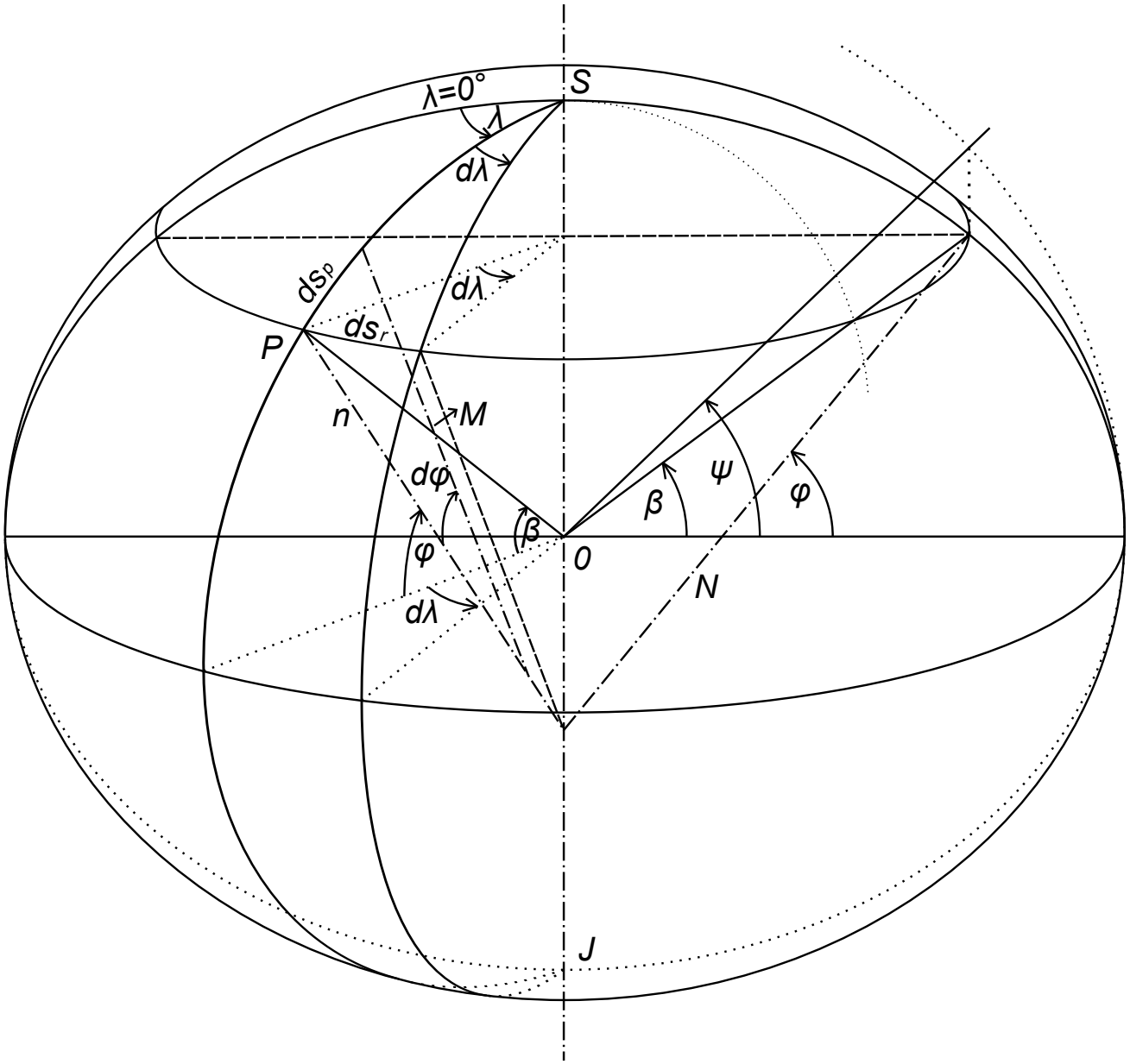
- tečná rovina ve zvoleném bodě
- použití pro malá území do průměru 20 km
- nulová křivost
- nelze použít pro mapy malých a středních měřítek
- vliv zanedbání křivosti Země pro polohopisné a výškopisné práce (viz předmět Geodézie) ...

Souřadnicové soustavy na referenčním elipsoidu

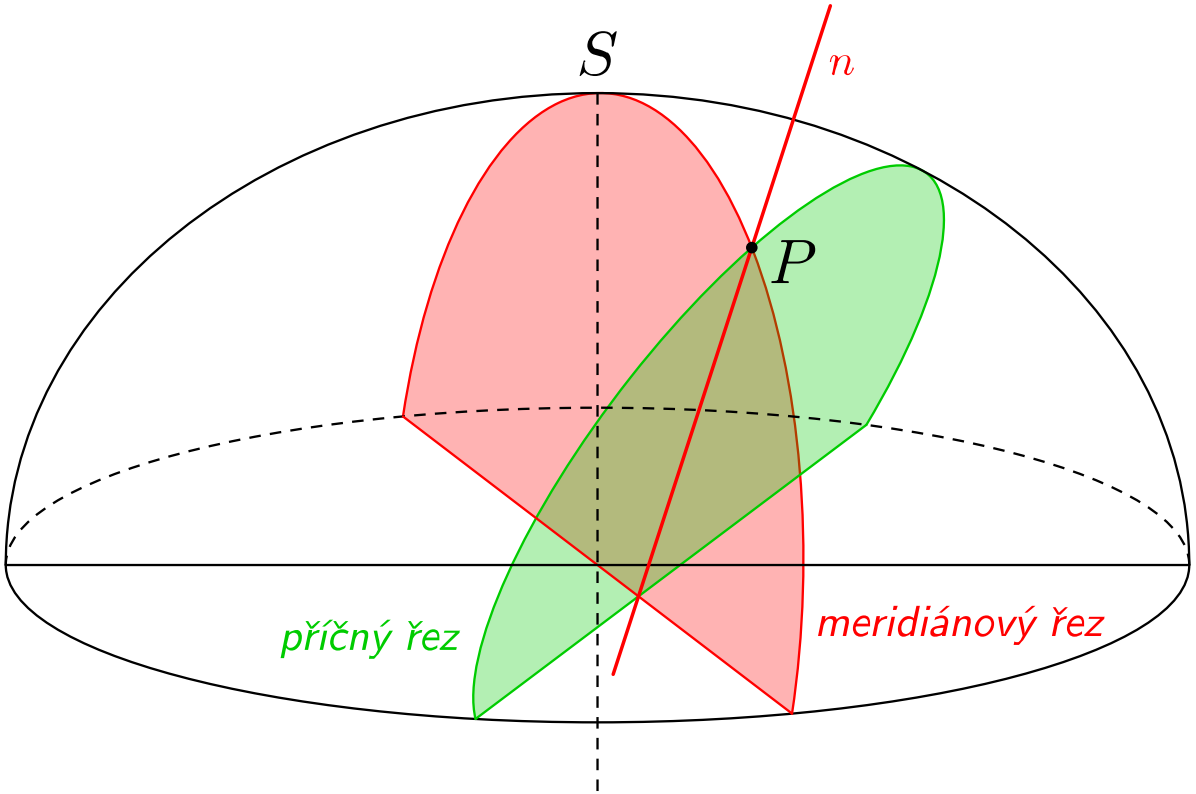
- zeměpisné souřadnice (φ, λ)
- geocentrická šířka (β)
- redukovaná šířka (ψ)
- pravoúhlé souřadnice (X, Y, Z)

- převod mezi zeměpisnými a pravoúhlými souřadnicemi – teoretická geodézie
- **zeměpisná šířka** (na elipsoidu φ, na kouli U)
  - úhel mezi normálou v bodě a rovinou rovníku
  - 0° až 90° na severní polokouli
  - 0° až -90° na jižní polokouli
- **zeměpisná délka** (na elipsoidu λ, na kouli V)
  - úhel mezi rovinou místního poledníku a rovinou základního poledníku
  - 0° až 180° na východní polokouli
  - 0° až -180° na západní polokouli polokouli

Souřadnicové soustavy



Normálové řezy



Souřadnicové soustavy

- **rovnoběžka** – konstatní zeměpisná šířka
- **poledník** (meridián) – konstatní zeměpisná délka
- **rovník** – $\varphi = 0^\circ$ resp $U = 0^\circ$
- **zeměpisné póly** – $\varphi = \pm 90^\circ$ resp $U = \pm 90^\circ$

- geocentrická šířka

$$\operatorname{tg} \beta = (1 - e^2) \ \operatorname{tg} \varphi$$

- redukovaná šířka

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{1 - e^2} \ \operatorname{tg} \varphi$$

Elementy poledníku a rovnoběžky

- na elipsoidu

$$\mathrm{d}s_\mathrm{p} = M\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}s_\mathrm{r} = N\cos\varphi\mathrm{d}\lambda$$

- na kouli

$$\mathrm{d}s_\mathrm{p} = R\mathrm{d}U$$

$$\mathrm{d}s_\mathrm{r} = R\cos U\mathrm{d}V$$

hlavní poloměry křivosti:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

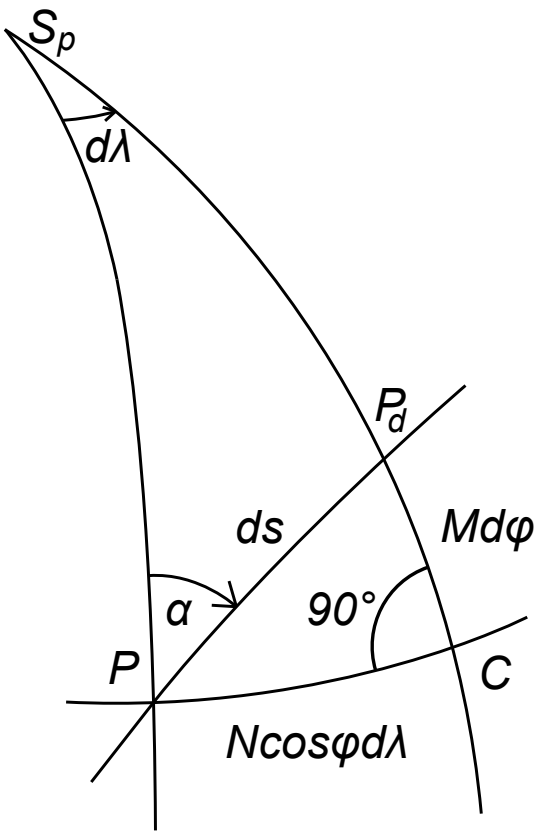
$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

Izometrické souřadnice

- zeměpisné souřadnice nejsou symetrické (izometrické)

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{f}\ (\xi, \eta)\,.\,(\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2)$$

- f je libovolná funkce



$$\mathrm{d}s^2 = M^2\mathrm{d}\varphi^2 + N^2\cos^2\varphi\mathrm{d}\lambda^2$$

$$\mathrm{d}q = \frac{M}{N\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$q = \int_0^{\varphi} \frac{M\mathrm{d}\varphi}{N\cos\varphi}$$

Izometrické souřadnice

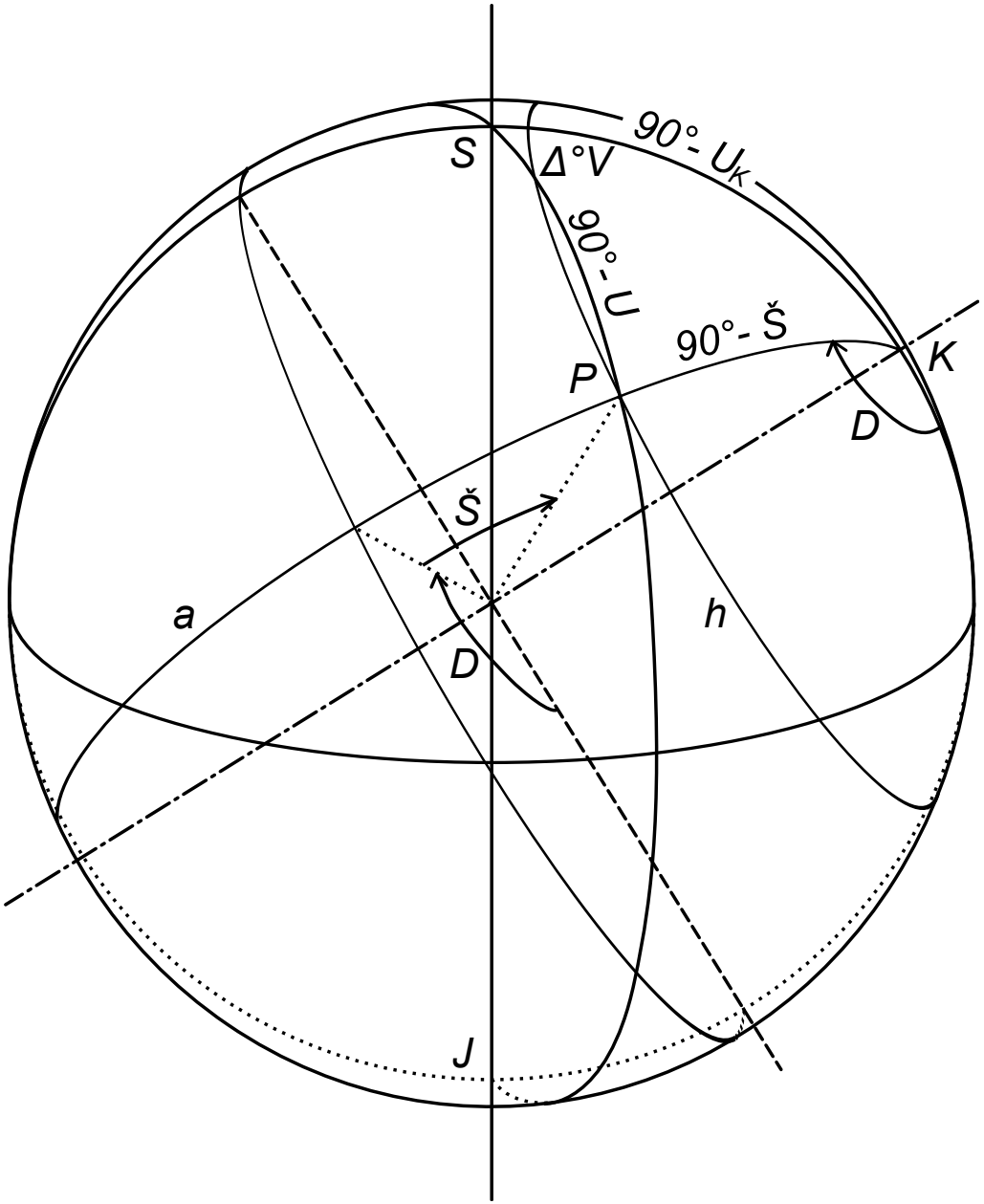
$$q = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ \right) \left(\frac{1 - e \ \sin \varphi}{1 + e \ \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

$$Q = \int_0^U \frac{\mathrm{d}U}{\cos U} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right)$$

Kartografické souřadnice

- aby se obraz referenční plochy (např. plášť kužele) co nejlépe přimykal v dané oblasti k referenční ploše
- osa zobrazovací plochy není rovnoběžná se zemskou osou
- souřadnice jsou vztaženy ke **kartografickému pólu** (K)
- **kartografická šířka**
  - definována analogicky jako zeměpisná šířka
  - měří se od kartografického rovníku
- **kartografická délka**
  - definována analogicky jako zeměpisná délka
  - měří se od zeměpisného poledníku procházejícího kartografickým pólem
- je-li kartografický pól na zeměpisném rovníku – zobrazení v **transverzální poloze**
- je-li kartografický pól jinde – zobrazení v **obecné poloze**

Kartografické souřadnice



Vztahy mezi kartografickými a zeměpisnými souř.

- snadno řešitelné pouze na referenční kouli
- sférická trigonometrie
  - sférický trojúhelník je tvořen úseky třech hlavních kružnic
  - $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in (0^o, 180^o)$
  - součet libovolných dvou stran je vetší než strana třetí
  - proti stejným stranám leží stejné úhly, proti vetší straně leží vetší úhel
  - součet všech stran je menší než 360°, tj. $a + b + c < 360^o$
  - součet všech úhlů je vetší než 180° a menší než 540°, tj. $180^o < \alpha + \beta + \gamma < 540^o$
  - rozdíl mezi součtem všech úhlu sférického trojúhelníku a úhlem přímým se nazývá *exces* sférického trojúhelníku (nadbytek), značí se e, tj. $e = a + b + c - 180^o$

Vztahy sférické trigonometrie

- sinová věta

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

- kosinová věta pro stranu

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

- kosinová věta pro úhel

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

- Neperovy analogie

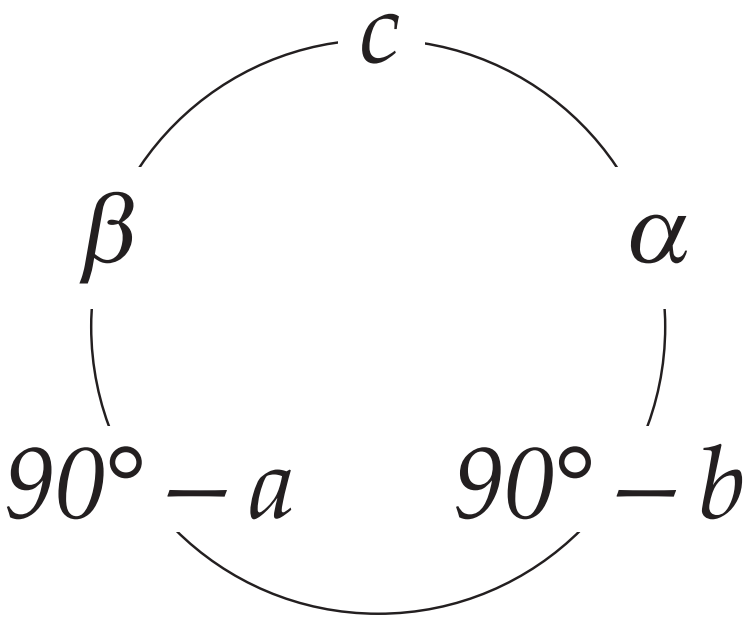
$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{cos(\frac{\alpha+\beta}{2})} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{cos(\frac{a-b}{2})}{cos(\frac{a+b}{2})} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$$

Neperovo pravidlo pro pravoúhlý trojúhelník

Do kruhového schématu zapíšeme nejprve přeponu c, po stranách přilehlé úhly α, β a proti nim rozdíly $90° - a$, $90° - b$, kde a, b jsou odvěsny pravoúhlého trojúhelníku. Dle Neperova pravidla platí:

- kosinus každého prvku v kruhovém schématu je roven součinu sinů protilehlých prvků
- kosinus každého prvku v kruhovém schématu je roven součinu kotangent sousedních prvků.



Vztahy mezi kartografickými a zeměpisnými souř.

- dle předchozích vztahů
- převod U,V na $\check{S},D$

$$\sin \check{S} = \sin U_k \sin U + \cos U_k \cos U \cos \Delta V$$

$$\sin D = \frac{\sin \Delta V \cos U}{\cos \check{S}}$$

- převod $\check{S},D$ na U,V

$$\sin U = \sin \check{S} \sin U_k - \cos \check{S} \cos U_k \cos D$$

$$\sin \Delta V = \frac{\sin D \cos \check{S}}{\cos U}$$

Souřadnice v rovině kart. zobrazení

- pravoúhlé souřadnice X, Y
  - počátek volen do obrazu kartografického pólu nebo do průsečíku obrazu základního poledníku a rovníku
  - orientace os může být různá (matematická, EN, speciální (JTSK))
  - někdy využito adičních konstant (zejména kvůli záporným souřadnicím)
- polární souřadnice ρ, ε
  - používají se u kuželových a azimutálních zobrazení (snadnější zobrazovací rovnice)
  - ρ je průvodič (eukleidovská vzdálenost od počátku)
  - ε je úhel průvodiče měřený od rovnoběžky s osou X

Důležité křivky na kouli a elipsoidu

- **geodetická křivka** (na elipsoidu) - viz teoretická geodézie
- **ortodroma** (na kouli) - angl. great circle
- **loxodroma** - angl. rhumb line

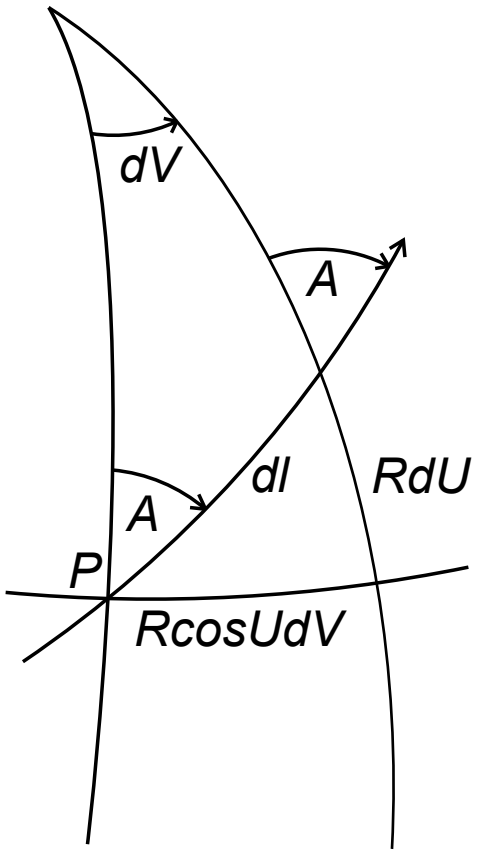
- důležité v navigaci
- ve vybraných zobrazeních se zobrazují jako přímky

Loxodroma

- křivka, která protíná poledníky pod stále stejným azimutem
- zpravidla se řeší na kouli
- spirálovitě se blíží k pólům
- obecná křivka (kromě vybraných zobrazení)
- Mercatorovo zobrazení (konformní válcové) – loxodroma přímka
- využití: letecká, námořní doprava (dnes nahrazeno GNSS)

Loxodroma, odvození

- počáteční bod P
- azimut loxodromy A (konstanta)
- délka loxodromy dl
- odvození:



$$\operatorname{tg} A = \frac{R \ \cos U \ \mathrm{d}V}{R \ \mathrm{d}U}$$

$$\mathrm{d}V = \operatorname{tg} A \ \frac{\mathrm{d}U}{\cos U}$$

$$V_2 - V_1 = \operatorname{tg} A \left(\ln \operatorname{tg} \left(\frac{U_2}{2} + 45^\circ \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{U_1}{2} + 45^\circ \right) \right)$$

Loxodroma, odvození

- délka loxodromy *dl*
- odvození:

$$\mathrm{d}l = \frac{R\,\mathrm{d}U}{\cos A}$$

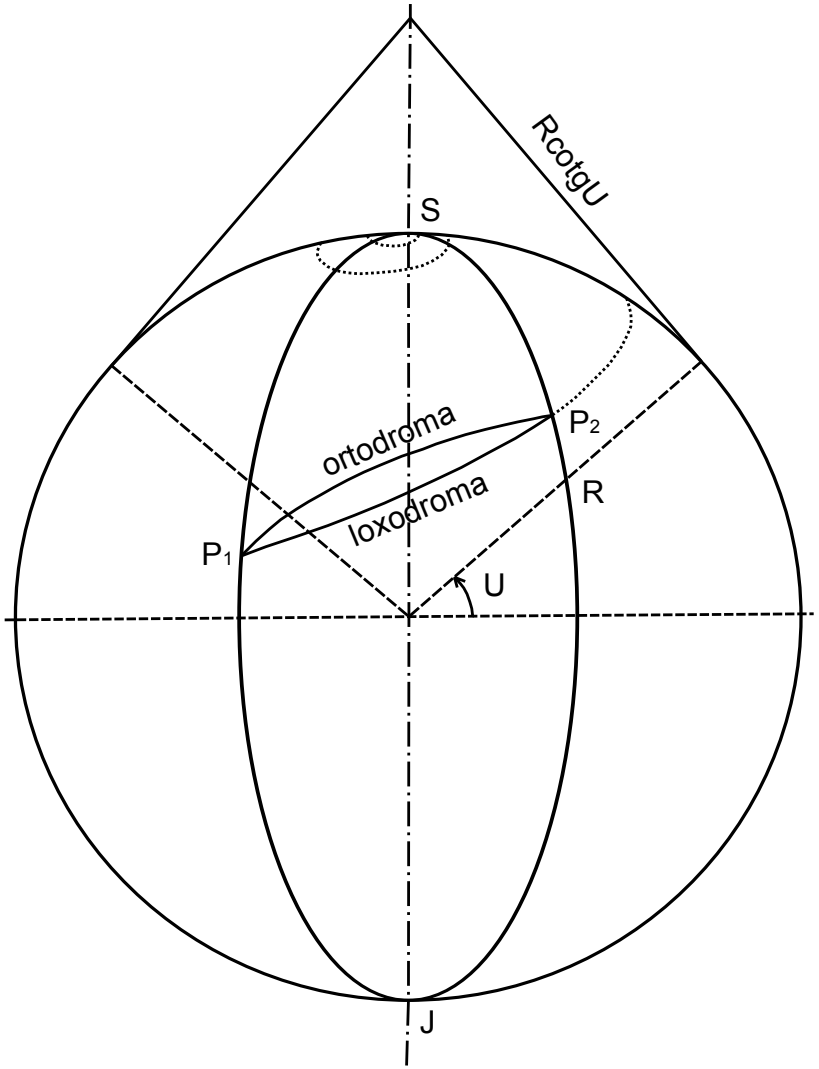
$$l_{12} = \frac{R}{\cos A}\,(U_2 - U_1)$$

- loxodroma probíhá vždy vzdálenějšími místy od pólu než ortodroma

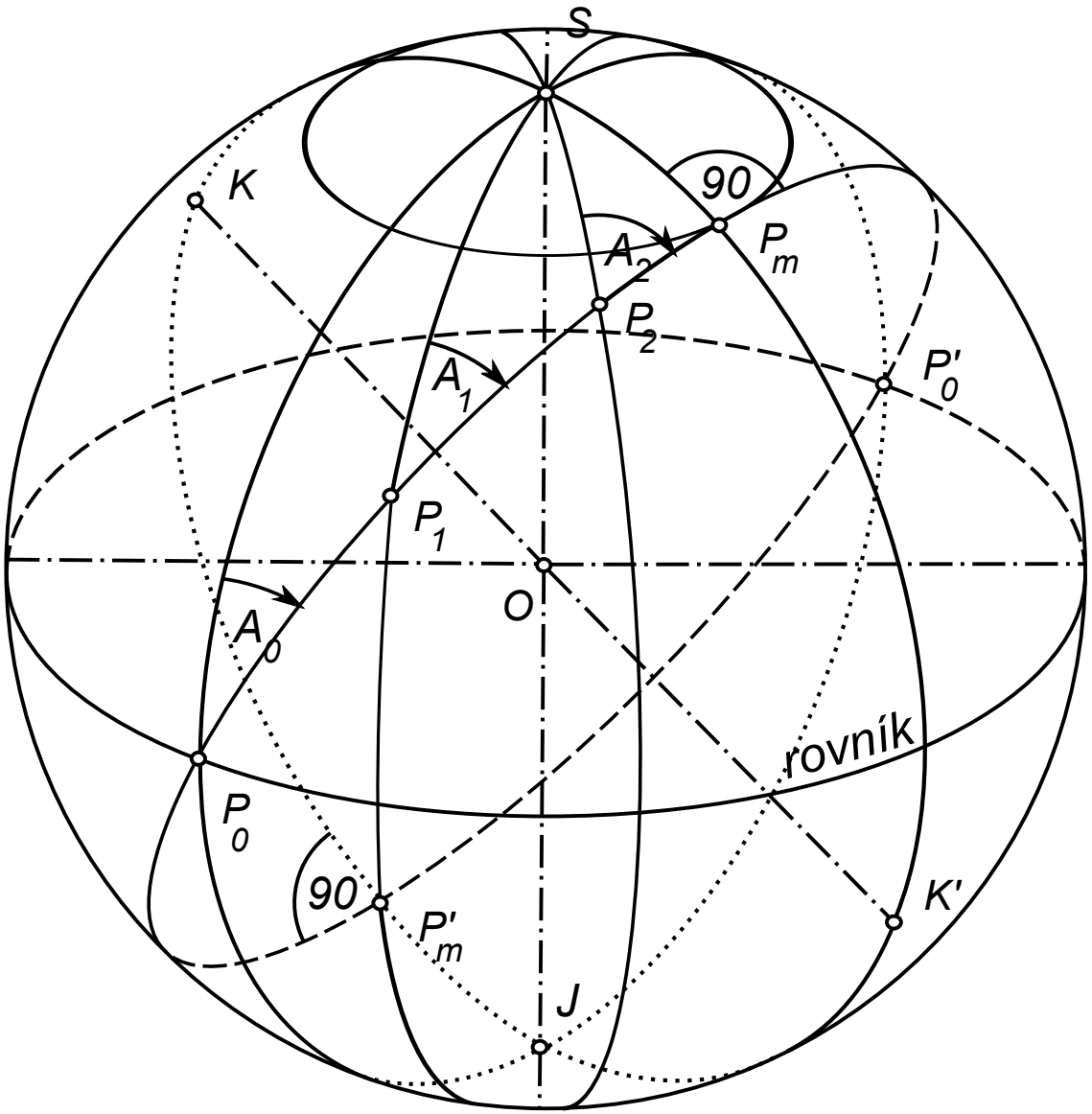
Ortodroma

- nejkratší spojnice dvou bodů na referenční kouli (geodetická křivka na kouli)
- protíná poledníky pod různými azimuty
- vrací se do bodu ze kterého vychází
- jedná se o hlavní kružnici (střed kružnice je ve středu koule)
- její délka je vždy kratší než délka loxodromy
- gnómonická projekce – ortodroma přímka
- využití: geodézie, letecká nebo námořní doprava

Porovnání loxodromy a ortodromy



Průběh ortodromy



Řešení ortodromy

- sférický trojúhelník
- dále platí
  Clairautova věta

$$\cos U \ \sin A = \cos U_{max}$$

a tedy

$$U_K = 90^\circ - U_{max} = A_o$$

$$V_K = V_{max} + 180^\circ$$