

# Detekce kartografického zobrazení z množiny bodů

Tomáš Bayer

*Katedra aplikované geoinformatiky*

*Albertov 6, Praha 2*

*bayertom@natur.cuni.cz*

**Abstrakt.** Detekce kartografického zobrazení z množiny bodů o známých rovinných souřadnicích představuje poměrně zajímavý a nepříliš často řešený problém. Níže uvedený postup používá k detekci kartografického zobrazení srovnání množiny bodů  $P$  v mapě s množinou  $Q$  korespondujících bodů ve známém kartografickém zobrazení. Nad oběma množinami jsou zkonstruovány Voronoiovy diagramy, parametry jednotlivých Voronoiových buněk následně analyzujeme. Praktické využití této problematiky lze nalézt při kartometrické analýze historických map.

*Klíčová slova:* Matematická kartografie, kartografické zobrazení, Voronoiova teselace.

## 1 Úvod

Kartografické zobrazení  $K$  zobrazuje referenční plochu  $R_1$  na referenční plochu  $R_2$ , lze ho popsat prostřednictvím zobrazovacích rovnic v explicitním vyjádření

$$x = f(\varphi, \lambda) \quad (1)$$

$$y = g(\varphi, \lambda) \quad (2)$$

O zobrazovacích funkcích  $f$ ,  $g$  se předpokládá, že jsou spojitě a snadno diferencovatelné, vzájemně nezávislé. Proměnné  $\varphi$ ,  $\lambda$  jsou zeměpisné souřadnice bodu na referenční ploše  $R_1$ ,  $x$ ,  $y$  pravouhlé souřadnice téhož bodu na referenční ploše  $R_2$ .

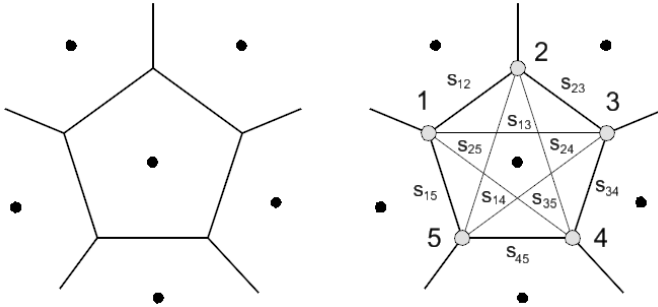
Voronoiova teselace  $VT$  přiřazuje každému bodu množiny  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  uzavřenou či otevřenou oblast, tj.  $V(P) = \{V(P_1), V(P_2), \dots, V(P_N)\}$ , takovou, že libovolný bod  $X \in V(P_i)$  je blíže k bodu  $P_i$  než k jakémukoliv bodu  $P_j$ . Platí

$$d(X, V(P_i)) \leq d(X, V(P_j)).$$

Uzavřenou oblast  $V(P_i)$  nazýváme Voronoiovou buňkou.

## 2 Proces analýzy

První krok zahrnuje rozvalu týkající se výběru množiny vstupních bodů  $P$ , nad kterými budou generovány VD. Vzhledem k faktu, že kartografické dílo může být (a většinou i bývá) z hlediska obsahového poměrně obsáhlé, není únosné při analýze pracovat se všemi jeho prvky (resp. s jejich číselnou reprezentací), ale pouze s podmnožinou těchto prvků. V tomto



Obrázek 1: Převod Voronoiovy buňky na úplný neorientovaný graf.

příspěvku předpokládáme existenci kartografického podkladu se sítí poledníků a rovnoběžek, pro detekci lze použít body ležící v uzlových bodech poledníků a rovnoběžek tvořící množinu  $P$ . Prvky množiny  $Q$  představují obrazy bodů množiny  $P$  v jednotlivých kartografických zobrazeních.

## 2.1 Podobnost $V(P)$ a $V(Q)$

Posouzení podobnosti  $V(P)$  a  $V(Q)$  je klíčovým krokem analýzy. Vzhledem k faktu, že VD jsou značně citlivé k poloze generátorů, lze tvrdit:  $V(P)$  je podobné  $V(Q)$  právě když jsou podobné i jejich geometrické parametry. Pokud nalezneme takové zobrazení  $\xi$ , které představuje lineární operátor (tj. vyjadřuje existenci lineárního vztahu mezi  $V(P)$  a  $V(Q)$ ), jsou obě množiny  $P$  a  $Q$  podobné (tj. vzájemně posunuté, otočené, zvětšené či zmenšené).

Základním zprostředkujícím parametrem sloužícím pro výpočet vzájemného vztahu obou množin bude vztah vzdálenosti  $s$  mezi dvojicí bodů náležejících  $V(P_i)$  a jí odpovídající vzdálenosti  $s'$  mezi dvojicí bodů náležejících  $V(Q_i)$ . Konkrétněji se bude jednat o dvojice bodů ležících na hraně libovolné Voronoiovy buňky. Takových dvojic lze pro Voronoiovu buňku s  $n$  uzly nalézt  $\binom{n}{2}$ .

Pro tento účel převedeme Voronoiovu buňku na strukturu představovanou úplným neorientovaným grafem, viz obr. 1.

**Úplný graf.** Graf  $G = (H, U, \rho)$ , mezi jehož každými dvěma uzly  $u_i, u_j \in U$  existuje právě jedna hrana, nazýváme úplným grafem. Prvky množiny  $H$  představují hrany, prvky množiny  $U$  uzly grafu  $G$ ,  $\rho$  pak incidenci grafu. Každá hrana  $h_{ij} \in H$  má přiřazeno ohodnocení  $w_{ij} \in \mathbb{R}$ , vyjadřující kvalitativní resp. kvantitativní hodnotu nějakého jevu.

**Maticе  $W$ .** Ohodnocení hran grafu budou v tomto případě představovat euklidovské vzdálenosti  $s$ . Graf  $G$  lze popsat čtvercovou maticí  $W$  řádu

$n$ , jejíž prvky  $w_{ij}$  jsou definovány následujícím vztahem.

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i = j, \\ s(u_i, u_j), & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \quad (3)$$

Matici  $W$  nad množinou  $V(P_i)$  označíme  $W_{P_i}$ ,  $u_i \approx P_i$ ,

$$W_P = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

matici  $W$  nad množinou  $V(Q_i)$  označíme  $W_{Q_i}$ ,  $u_i \approx Q_i$ .

$$W_Q = \begin{pmatrix} s'_{11} & s'_{12} & \dots & s'_{1n} \\ s'_{12} & s'_{22} & \dots & s'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s'_{1n} & s'_{2n} & \dots & s'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Je-li  $\xi$  lineární operátor, zřejmě platí

$$\xi(W_{P_i}) = W_{Q_i}.$$

**Charakteristická rovnice  $\xi$ .** Vyjdeme z charakteristické rovnice lineárního operátoru  $\xi$ . Skalár  $\lambda$  představuje vlastní číslo lineárního operátoru  $\xi$ , pokud existuje vektor  $v$ ,  $v \neq 0$ , pro který platí

$$\xi(v) = \lambda v.$$

Říkáme, že  $v$  je vlastní vektor operátoru  $\xi$ . Charakteristickou rovnici lze zapsat ve tvaru

$$\det(\lambda E - \xi) = 0.$$

Kořeny rovnice s neznámou  $\lambda$  označíme  $\lambda_i$ ,

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

představují vlastní čísla lineárního operátoru  $\xi$ .

**Podobnost matic a vlastní čísla.** Analýza je založena na faktu, že podobné matice mají stejná vlastní čísla. Čtvercové matice  $B, C$  nazýváme podobnými, existuje-li taková regulární matice  $M$ , aby platilo

$$C = M^{-1}BM.$$

Sloupce matice  $M$  pak tvoří vlastní vektory. Pro vlastní čísla matic  $B, C$  platí

$$\lambda_B = \lambda_C.$$

Jestliže pro  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$C = \alpha M^{-1} B M,$$

pro vlastní čísla matic  $B, C$  platí

$$\lambda_C = \alpha \lambda_B.$$

Matice  $W$  je invariantní vůči úhlu natočení množin  $P$  a  $Q$ . V tomto případě je  $M = E$ , matice  $W_{Q_i}$  je  $\alpha$ -násobkem matice  $W_{P_i}$ . Zřejmě platí

$$W_{Q_i} = \alpha W_{P_i} \quad (4)$$

$$\lambda_{Q_i} = \alpha \lambda_{P_i}. \quad (5)$$

Pro stopy matic lze psát

$$tr(W_{Q_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_{Q_i},$$

$$tr(W_{P_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_{P_i}.$$

Pak platí

$$tr(W_{Q_i}) = \alpha tr(W_{P_i}).$$

Jako testovací kritérium detekující, zda  $W_{Q_i}$  je  $\alpha$ -násobkem  $W_{P_i}$ , použijeme

$$t_{Q_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_{Q_i}^2,$$

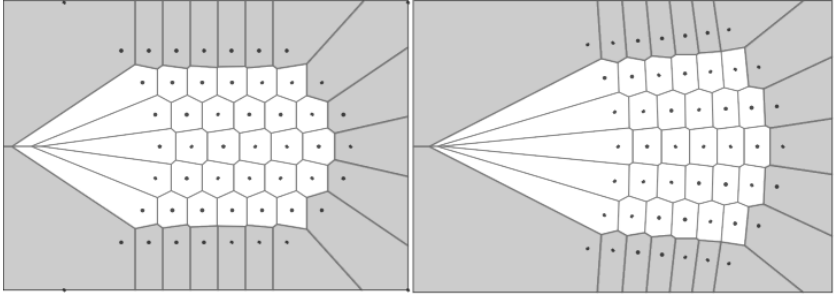
$$t_{P_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_{P_i}^2.$$

Pro vztah mezi  $t_{Q_i}$  a  $t_{P_i}$  platí

$$t_{Q_i} = \alpha^2 t_{P_i}, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

## 2.2 Selekcce $V(P)$ a $V(Q)$

Před vlastním výpočtem testovacího kritéria je nutno provést selekci množin  $V(P)$  a  $V(Q)$ . Podobnost nebudeme posuzovat mezi všemi  $V(P_i)$  a  $V(Q_i)$ , množinu dvojic omezíme. Z výpočtu vyloučíme takové buňky  $V(P_i)$  a  $V(Q_i)$ :



Obrázek 2: Selektce  $V(P_i)$  a  $V(Q_i)$ , u kterých alespoň jeden z generátorů leží na konvexní obálce.

- u kterých je počet hran různý. Neexistuje -li žádná dvojice buněk  $V(P_i)$  a  $V(Q_i)$  se stejným počtem hran, je hodnota testovacího kritéria  $m_\alpha = \infty$ .
- alespoň jeden z dvojice parametrů se vztahuje ke generátoru  $P_i$  nebo  $Q_i$  ležícímu na konvexní obálce. Těmto geometrickým parametrům byla přiřazena hodnota 0. Uvedeným krokem odstraníme všechny neuzavřené buňky obou množin.

### 2.3 Výpočet testovacího kritéria.

Po selekci buněk  $VD$  můžeme provést vlastní výpočet testovacího kritéria. Počet takto vzniklých Voronoiových buněk označme  $N'$ . Pro zbylé buňky  $V(P_i)$  a  $V(Q_i)$  naplníme matice  $t_Q(1, N')$  a  $t_P(1, N')$ . V dalším kroku určíme prvky matice  $\alpha(1, N')$

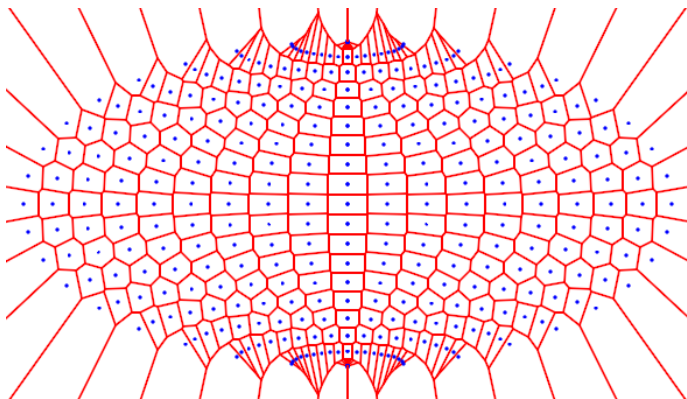
$$\alpha = \sqrt{\frac{t_Q}{t_P}}.$$

V praxi díky náhodným či systematickým chybám nebudou hodnoty  $\alpha_{1i}$  stejné, budou se lišit. Jako kritérium přesnosti a tím pádem i hodnotu ilustrující podobnost  $V(P)$  a  $V(Q)$  resp. množin  $P$  a  $Q$  lze použít směrodatnou odchylku

$$m_\alpha = \sqrt{\frac{\sum v_\alpha v_\alpha}{N' - 1}}. \quad (7)$$

Čím je hodnota  $m_\alpha$  nižší, tím podobnější jsou si množiny  $P$  a  $Q$ . Provádíme -li srovnání  $P^{(k)}$  s více množinami  $Q^{(k,j)}$  představujícími různá kartografická zobrazení, nejpodobnější bude množina s  $m_\alpha^{min}$ .

$$m_\alpha^{min} = \min(m_{\alpha_1}, m_{\alpha_2}, \dots, m_{\alpha_{N'}}) \quad (8)$$



Obrázek 3: Voronoiův diagram nad množinou  $P$  Hammerova zobrazení.

### 3 Závěr

Tento příspěvek se snažil nastínit možnost detekce kartografického zobrazení z množiny bodů srovnáním s množinou korespondujících bodů ve známém kartografickém zobrazení. Článek poukazuje na souvislost matematické kartografie, výpočetní geometrie a teorie grafů.

### Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu grantu GAČR č. 205/04/088: „Kartometrická a semiotická analýza a vizualizace starých map českých zemí z období 1518-1720“.

### Reference

- [1] J. Boehm, J. Radouch, V. Hampacher: *Teorie chyb a vyrovnávací počet*, Geodetický a kartografický podnik, Praha, 1990
- [2] P. Buchar, V. Hojovec: *Matematická kartografie*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1996
- [3] J. P. Snyder, L. M. Bugayevskiy: *Map projections*, Taylor and Francis, London, 1995