ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta stavební

Katedra mapování a kartografie

Zobrazení Země na pravidelných mnohostěnech

Displaying the Earth on regular polyhedra

Bakalářská práce

Studijní program: Geodézie a kartografie

Studijní obor: Geodézie a kartografie

Vedoucí práce: Ing. Jiří Cajthaml, PhD.

Jakub Kozák

Kladno 2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(v tištěné podobě je zde vložen formulář)

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o etické přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Kladně, 14. května 2010 **Jakub Kozák**

....

Poděkování:

Na tomto místě bych rád poděkoval všem, kteří mi při práci pomáhali už jen tím, že respektovali její vypracování na úkor jiných mých činností. Za konzultační činnost děkuji především vedoucímu mé práce, Ing. Jiřímu Cajthamlovi, PhD.

Abstrakt

Tato práce pojednává o pravidelných a polopravidelných mnohostěnech. Z těchto těles jsou některá vybrána a ta použita jako aproximace Země tvaru koule. Na řadě mnohostěnů je pak ukázáno, jak se aproximace zlepšuje s rostoucím počtem stěn tělesa. Nejdůležitější částí je zobrazení mapy světa na tyto mnohostěny vhodným kartografickým zobrazením a vytvoření reálných prostorových modelů. Výstupem je deset pseudoglóbů slepených z papíru, které jsou nedílnou součástí práce.

klíčová slova: pravidelné mnohostěny***;*** aproximace koule***;*** gnomonická projekce***;*** ortodroma

Abstract

This text discourses about regular and semiregular polyhedra. Chosen solids from these are used as an approximation of sphere shape of the Earth. It is shown by succession of polyhedra that the approximation is improving with growing count of faces of the solid. The most important part of the thesis is displaying the world map on these polyhedra by suitable cartographic projection and creating the real three-dimensional models. The output is ten paper glued pseudoglobes which are integral part of the thesis.

Key words: Regular polyedra***;*** Gnomonic projection***;*** Approximation for sphere***;*** Orthodrome

Obsah

Příloha D: Zobrazení Země na mnohostěnech v sítích 72

1 Úvod

Předložená práce se zabývá polyedrickými zobrazeními zemského povrchu a následným seskupením do reálných prostorových modelů.

V první části práce přináší přehled pravidelných mnohostěnů a jejich popis. Ačkoliv je jejich počet omezen, stojí za to věnovat jim pozornost a zamyslet se nad uskupením mnohoúhelníků, které vytvářejí tak jednoduše vypadající tělesa. Na řadu pravidelných mnohostěnů navazují mnohostěny polopravidelné, které jsou neméně zajímavé a i jim se částečně tato práce věnuje. Mezi pravidelnými mnohostěny má, celkem logicky, výsadní postavení krychle. Jedním z cílů této práce je ale poukázat na všechna tato tělesa stejně, jako se o to pokouší autoři textů o pravidelných mnohostěnech, ze kterých bylo také čerpáno.

Co je však hlavním cílem této práce a nadstavbou oproti matematickým pojednáním o pravidelných mnohostěnech, je proces zobrazení mapy světa na tato tělesa. Je důležité zvážit vhodné kartografické zobrazení, kterým lze vhodně mapový podklad přenést do jednotlivých mnohoúhelníků tvořících stěny tělesa. Práce ukazuje, že nevýhody konkrétního kartografického zobrazení pro určité účely se nemusí vůbec projevit při zobrazování za jiným účelem, kde se ukáže přednost jiné, ne tak často využívané, vlastnosti zobrazení.

Výstupy této práce ukazují postupnou aproximaci koule pravidelnými tělesy od toho nejjednoduššího, které ale představuje nejméně zdařilou aproximaci, po nejkomplikovanější, které je aproximací více dokonalou. Nejjednodušším tělesem je čtyřstěn. Nejsložitějším by pak byl mnohostěn o nekonečném počtu stěn, kde odchylka sousedních hran by se limitně blížila 180°. Rozsah práce by mohl končit zobrazením Země na dvacetistěn. Existence polopravidelných mnohostěnů – Archimédovských těles, z nichž většina disponuje více plochami než dvaceti, však vybízí pokračovat v zobrazení Země i na složitější tělesa. Za nejsložitější mnohostěn, na který tak bude zobrazení Země (nad rámec původních cílů práce) provedeno, byl stanoven Archimédův dvaatřicetistěn. Tato volba pro účel a rozsah práce postačuje a s ohledem na pracnost prostorového modelování těles z papíru a estetiku výsledného modelu by nebylo vhodné dělit povrch na více ploch. Z hlediska lepší aproximace koule a dodržení cíle polyedrických zobrazení, kterým je stlačit zkreslení na mnohoúhelnících pod určitou mez, to samozřejmě možné je.

Konečným a snad nejefektivnějším výstupem práce je tedy vytvoření reálných prostorových modelů. Materiálem byl předem zvolen papír s barevným potiskem. Vyhotovení modelů se přirozeně nabízí a je názornou a nedílnou přílohou celé práce.

Účelem práce není prezentovat konkrétní mapový podklad nebo porovnávat různé mapy světa mezi sebou. Právě naopak, pokryv mnohostěnů světovou mapou má spíše ilustrativní a estetickou funkci a důležitější než barevné zobrazení kontinentů a oceánů samotných je zobrazení zeměpisné sítě, která ukazuje průběh zkreslení způsobené vybraným zobrazením a zároveň je patrné zachování či porušení geometrie rovnoběžek a poledníků.

2 Popis mnohostěnů

V této kapitole budou popsány „vstupní produkty“ z hlediska stereometrie. Bude uveden přehled všech pravidelných a některých polopravidelných mnohostěnů. Jednotlivá tělesa budou podrobněji popsána a nakonec bude oddiskutováno, která budou vybrána a použita pro zobrazení povrchu Země.

2.1 Definice mnohostěnů

Mnohostěny jsou prostorová geometrická tělesa, jejichž povrch je tvořen rovinnými n-úhelníky v počtu s, které se navzájem stýkají v hranách a vrcholech a vymezují tak prostor mnohostěnu. Počet vrcholů rovinného obrazce n je minimálně 3 a tento počet je konečný. Počet mnohoúhelníků s je minimálně 4 a tento počet je konečný. Počet hran budeme dále označovat h a počet vrcholů mnohostěnu nechť je označován v.

Mnohostěny existují pravidelné a nepravidelné. Pravidelnost spočívá ve skutečnosti, že jejich stěny tvoří navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky, kterých se v každém vrcholu mnohostěnu stýká stejný počet [4]. Vzájemná návaznost stěn na sebe se pravidelně opakuje na povrchu celého mnohostěnu a tato vlastnost má za následek totožnou polohu geometrického středu tělesa s polohami středů koule opsané i vepsané [4].

Další vlastností, kterou mnohostěn může mít, je konvexita. Konvexita znamená, že pro každou dvojici bodů A, B náležících tělesu platí, že i jejich spojnice AB náleží tělesu. Leží-li body A, B uvnitř tělesa, jejich spojnice AB musí ležet taktéž uvnitř tělesa. Leží-li body A,B na hranách tělesa nebo jsou vrcholy tělesa, může jejich spojnice být částí hrany tělesa nebo hranou tělesa [6].

Pro konvexní mnohostěn platí Eulerův vztah (Leonhard Euler; švýcarský matematik a fyzik; 1707 – 1783) mezi počtem vrcholů v, hran h a stěn s:

$$v + s = h + 2\,.$$

V uvedeném tvaru říká, že součet počtu vrcholů a stěn konvexního mnohostěnu odpovídá počtu jeho hran zvětšeného o dvě.

2.2 Typy mnohostěnů

Existuje přesně pět pravidelných konvexních mnohostěnů. Jsou označována jako Platónská tělesa, jejich počet je konečný, a to pět. Jsou známy již z dob Platóna (řecký matematik a filosof; 427 př. n. l. – 347 př. n. l.) a tento konkrétní konečný počet lze dokázat pomocí teorie rovinných grafů při splnění Eulerovy věty [6] [8].

Vhodným ořezáním hran a vrcholů platónských těles (pravidelných mnohostěnů) mohou vzniknout tělesa, jejichž povrch je tvořen pravidelnými mnohoúhelníky nejčastěji dvou typů (obecně dvou a více typů). Takto vzniklá tělesa nejsou již pravidelnými mnohostěny, jistou pravidelnost však vykazují, proto jsou nazývána polopravidelnými mnohostěny. Jedním z typů polopravidelných konvexních mnohostěnů jsou Archimédovská tělesa (Archimédovy mnohostěny).

Další skupinou polopravidelných mnohostěnů jsou rombická tělesa. Jsou to mnohostěny, jejichž stěny jsou tvořeny pravidelnými n-úhelníky. Není ale už splněno, že se jich stýká v každém vrcholu stejný počet, a až na jedinou výjimku jsou složeny z mnohoúhelníků více než jednoho typu. Jejich hlavní charakteristikou je, že alespoň jeden typ mnohoúhelníkové stěny je tvaru kosočtverce, což vnáší do tělesa další nepravidelnost. Je totiž diskutabilní, na kolik je kosočtverec pravidelným mnohoúhelníkem, když má shodné pouze délky stran, nikoliv však velikosti vnitřních úhlů nebo délky úhlopříček.

Poslední skupiny polopravidelných mnohostěnů jsou hranoly a antihranoly. Hranol má rovnoběžné podstavy ve tvaru pravidelných n-úhelníků a n bočních stěn ve tvaru čtverců. Antihranol vznikne z hranolu pootočením jedné podstavy oproti druhé o úhel π/n. Bočními stěnami pak nejsou čtverce, ale dvojnásobný počet rovnostranných trojúhelníků. [4].

Pro všechny typy uvedených konvexních mnohostěnů platí uvedený Eulerův vztah a je znovu připomenuto, že délka hrany je po celém mnohostěnu stále stejná.

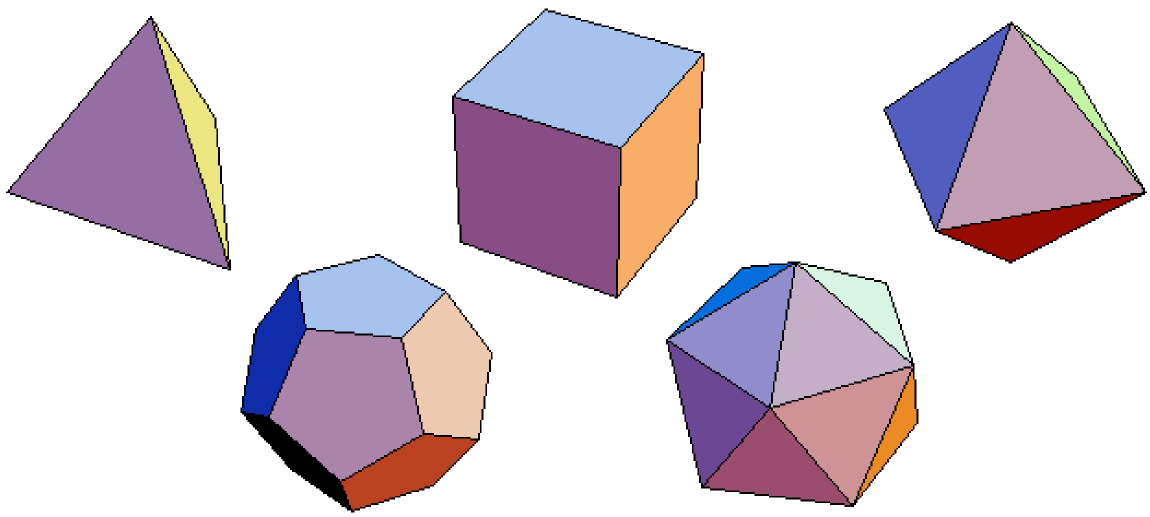
Pro účely zobrazení Země na mnohostěn lze uvažovat Zemi ve tvaru koule. Proto je vhodné vybrat mnohostěny, jejichž střed koule jim opsané a vepsané je totožný a ten použít jako střed koule, která se na mnohostěn zobrazí. Jak bude rozebráno v kapitole 2.3, všechna tělesa, na která bude zemský povrch zobrazen, budou Zemi tvaru koule opisovat, tudíž pro ně bude koulí vepsanou. Takovéto mnohostěny jsou právě výše uvedené konvexní mnohostěny pravidelné a polopravidelné – Platónská a Archimédovská tělesa. Tělesa rombická použita nebudou, protože, co do pravidelnosti, jsou v pořadí až třetí a sérii těles Platónských postačí doplnit tělesy Archimédovskými.

2.2.1 Platónská tělesa

V této podkapitole budou pravidelné mnohostěny popsány. Bude uveden zejména tvar, počet stěn jako základní charakteristika a budou popsány vztahy uvnitř každé stěny (výšky a úhlopříčky mnohoúhelníků).

Dále bude uveden vztah pro poloměr, objem a povrch koule vepsané, protože kouli je opisován mnohostěn dotýkající se každou stěnou právě v jednom bodě. Bude uveden vztah pro výpočet objemu a povrchu samotného mnohostěnu kvůli pozdějšímu porovnávání s ostatními mnohostěny při opsání koule stejného poloměru (více v kapitole 2.3). Pro výpočty za účelem navržení kartografického zobrazení je nutno znát i poloměr koule opsané. Posledním údajem je odchylka sousedních stěn. Její odvození je provedeno v rovině procházející středem tělesa a kolmé na obě stěny.

Nutno dodat, že pokud bude u pravidelného mnohostěnu uveden vztah nebo hodnota pro výpočet parametru v rámci jedné stěny nebo mezi více stěnami, pak tento vztah platí pro všechny ostatní stěny a sousedské vztahy mezi stěnami na celém mnohostěnu, protože pravidelnost tělesa zajišťuje, že prostorové uspořádání je po celém mnohostěnu naprosto stejné.



Obr. 2.2.1: Platónská tělesa[1]

Zdrojem pro uvedené vztahy vynesené v tabulce 2.2.1 byl [4]. Náčrtky těles v tabulce 2.2.1 jsou též převzaté[2].

1 Zdroj obrázku: http://www.math.rutgers.edu/~erowland/images/platonicsolids.gif
2 Zdroj obrázku: http://www.bymath.com/studyguide/geo/sec/geo21.gif

Platónská tělesa jsou vyobrazena na obrázku 2.2.1 v pořadí: pravidelný čtyřstěn, krychle, pravidelný osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.

Zajímavou vlastností, která byla během této práce zjištěna, je stejný poměr objemů a povrchů mnohostěnu a jemu vepsané koule. Tedy že platí vztah:

$$\frac{V_{koule}}{V_{mnohostěn}} = \frac{S_{koule}}{S_{mnohostěn}} . \tag{2.2.1}$$

Tento vztah byl zjištěn empiricky, když bylo vyšetřováno, jak kvalitní aproximací zemské koule jednotlivé mnohostěny jsou (více v kapitole 2.3).

Dalším zajímavým jevem pravidelných mnohostěnů je jejich dualita. Platí: *„Jedno těleso je duální k druhému, lze-li je navzájem (při vhodném poměru velikostí) do sebe vepsat tak, že vrcholy jednoho tělesa leží ve středech stěn druhého. Je tedy nutné, aby počet vrcholů jednoho tělesa byl stejný jako počet stěn tělesa druhého (a naopak).“(citováno z* [4]*).* Každý z pravidelných mnohostěnů má jiný pravidelný mnohostěn, se kterým je duální. Čtyřstěn je duální opět se čtyřstěnem, krychle s osmistěnem a naopak. Duální jsou spolu dvanáctistěn a dvacetistěn. Některé prvky s dualitou jsou zřejmé na první pohled (např. počet stěn jednoho tělesa odpovídá počtu vrcholů druhého a naopak), jiné byly zjištěny až při výpočtech a schématických nákresech v kapitole 4.1.1 (vzájemně duální mnohostěny mají stejný poměr délek poloměru koule opsané a vepsané).

Značení použité v následujícím textu včetně tabulky 2.2.1:

a…strana mnohoúhelníku, hrana mnohostěnu

u_s…úhlopříčka mnohoúhelníku

v_s…výška mnohoúhelníku

s…počet stěn mnohostěnu

h…počet hran mnohostěnu

v…počet vrcholů mnohostěnu

P…povrch mnohostěnu (také S)

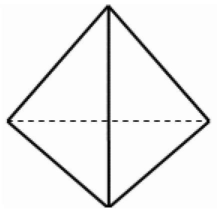
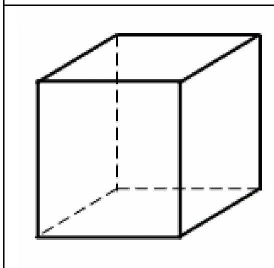
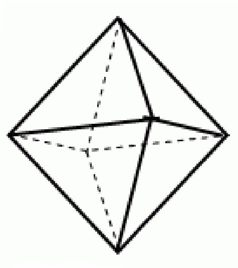
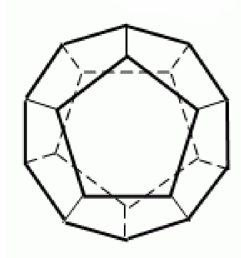
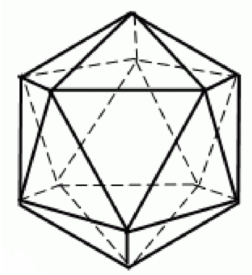
V…objem mnohostěnu

ρ...poloměr koule vepsané

r…poloměr koule opsané

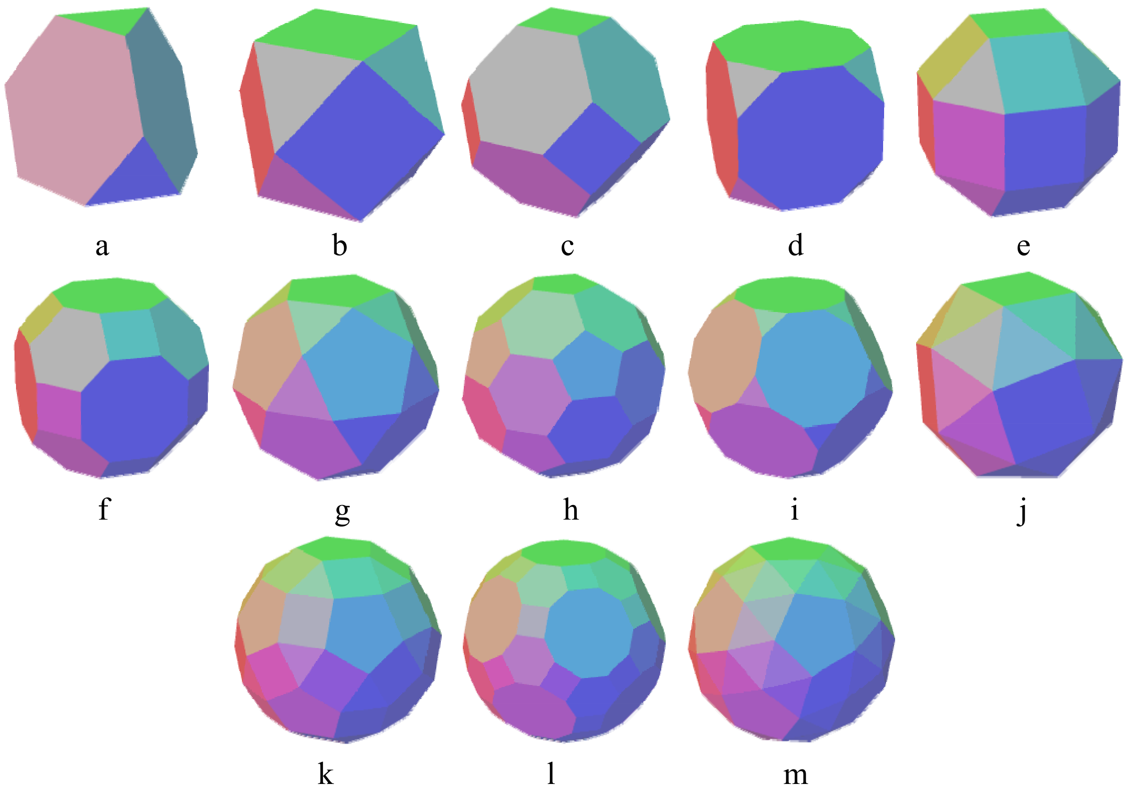
ω...odchylka sousedních stěn

*T*ab. 2.2.1: Přehled Platónských těles

náčrtek tělesa	***P***	***V***	***ρ***	***r***	***ω***
Pravidelný ČTYŘSTĚN **pravidelný trojboký jehlan, TETRAEDR** *s = 4, h = 6, v = 4*					
	$a^2\sqrt{3}$	$a^3\dfrac{\sqrt{2}}{12}$	$a\dfrac{\sqrt{6}}{12}$	$r = a\dfrac{\sqrt{6}}{4}$	70° 32'
Pravidelný ŠESTISTĚN **krychle, HEXAEDR** *s = 6, h = 12, v = 8*					
	$6a^2$	a^3	$\dfrac{a}{2}$	$r = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	90°
Pravidelný OSMISTĚN **OKTAEDR** *s = 8, h = 12, v = 6*					
	$2a^2\sqrt{3}$	$a^3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	$\rho = a\dfrac{\sqrt{6}}{6}$	$r = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	109° 28'
Pravidelný DVANÁCTISTĚN **DODEKAEDR** *s = 12, h = 30, v = 20*					
	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\dfrac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$	$a\dfrac{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}$	$a\dfrac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$	116° 34'
Pravidelný DVACETISTĚN **IKOSAEDR** *s = 20, h = 30, v = 12*					
	$5a^2\sqrt{3}$	$\dfrac{5a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$	$\dfrac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$	$a\dfrac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$	138° 11'

2.2.2 Archimédovská tělesa

Jsou to polopravidelné mnohostěny. To znamená, že jejich stěny jsou tvořeny pravidelnými mnohoúhelníky dvou nebo tří různých typů. Také platí, že se jich v každém vrcholu stýká stejný počet. Jak je uvedeno v [4], je jich známo patnáct. Většinu z nich odvodil a popsal Archimédes a většina je také uvedena v tabulce 2.2.2 a na obrázku 2.2.2. Vznikají ořezáváním hran a vrcholů pravidelných mnohostěnů tak, aby plocha řezu byla v konečné podobě tvaru pravidelného n-úhelníku a délka hrany byla po celém tělese stejná. Pro kouli vepsanou však může být porušena vlastnost dotyku všech stěn tělesa (platí pro stěny vzniklé ořezáním) Jejich názvy se ponechávají v angličtině, protože překlad není jednoduchý a jednoznačný. Pojmenování pouze podle počtu stěn nestačí, protože těles se stejným počtem stěn je více. Tabulka 2.2.2 čerpá z [4].



Obr.2.2.2[3]

Práce se má zabývat zobrazením Země na mnohostěny pravidelné, nebude ale od věci, pokud bude ukázáno zobrazení i na vybraná polopravidelné tělesa. Vybrána byla tato:

[3] Zdroj obrázku: http://polyhedra.mathmos.net/entry/archimedeansolids.html

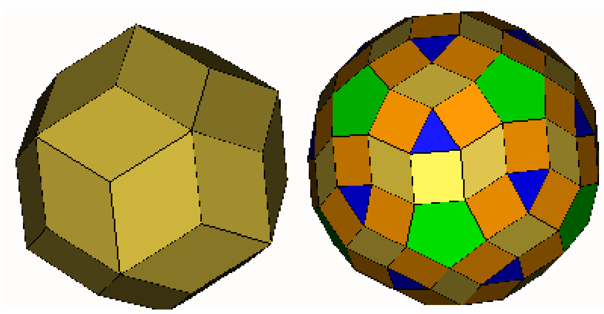
Aškinuzeho těleso – šestadvacetistěn, rhombicuboctahedron (odvodil údajně Aškinuze r.1957, nikoli Archimédes [7], Obr.2.2.2.e) a komolý dvacetistěn, tedy dvaatřicetistěn, truncated icosahedron (Obr. 2.2.2.h).

Tab.2.2.2: Přehled Archimédovských těles

Název v angličtině (případně české označení)	v	h	s	**Ořezané Platónské těleso**	Pozice na Obr.2.2.2
truncated tetrahedron	12	18	8	čtyřstěn	a
cuboctahedron	12	24	14	krychle, osmistěn	b
truncated octahedron	24	36	14	osmistěn	c
truncated cube	24	36	14	krychle	d
rhombicuboctahedron (Aškinuzeho těleso)	24	48	26	krychle, osmistěn	e
truncated cuboctahedron	48	72	26	krychle, osmistěn	f
icosidodecahedron	30	60	32	dvanáctistěn, dvacetistěn	g
truncated icosahedron (komolý dvacetistěn)	60	90	32	dvacetistěn	h
truncated dodecahedron	60	90	32	dvanáctistěn	i
snub cube	24	60	38	krychle	j
rhombicosidodecahedron	60	120	62	dvanáctistěn, dvacetistěn	k
triuncated icosidodecahedron	120	180	62	dvanáctistěn, dvacetistěn	l
snub dodecahedron	60	150	92	dvanáctistěn	m

2.2.3 Ostatní tělesa

Za všechna rombická tělesa je uvedena ukázka na obrázku 2.2.3.



Obr.2.2.3[4]

[4] Zdroj obrázku: http://www.orchidpalms.com/polyhedra/rhombic/icosarhom.htm

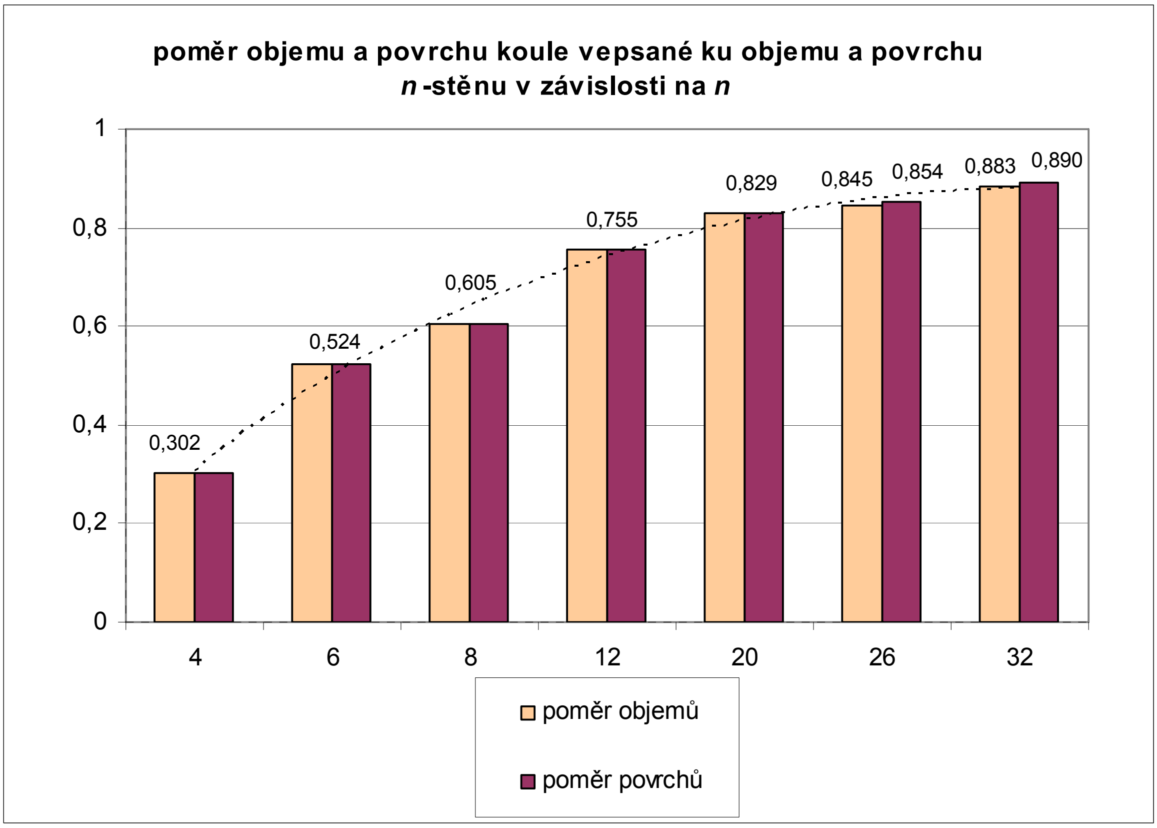
2.3 Mnohostěn jako aproximace koule

Vzhledem k tomu, že aproximujeme zemskou kouli, je jasné, že kouli bude mnohostěn opisován. Z hlediska mnohostěnu pak budeme uvažovat kouli vepsanou. Je totiž důležité, aby se mnohostěn svými všemi plochami koule dotýkal. Vzniknou tak na povrchu mnohostěnu body, ve kterých bude aproximace dokonalá a bude dosaženo nulových zkreslení, protože alespoň na těchto diferenciálně malých plochách bude dosaženo splynutí mnohostěnu s koulí. Z přehledu mnohostěnů uvedeného v kapitole 2.2 budou jako aproximace zemské koule použita všechna Platónská a dvě Archimédovská tělesa. V tabulce 2.3 je utvořen přehled poměrů objemu a povrchu koule ku objemům a povrchům aproximujících mnohostěnů. Předpokladem je, že s rostoucím počtem stěn se aproximace koule zlepšuje. Je vidět, že u pravidelných mnohostěnů platí vztah (2.2.1), další propočítávaná tělesa už mírně lépe aproximují kouli co do povrchu před objemem. Ideální poměr by byl roven jedné a z grafického znázornění v grafu 2.3 je patrné, že s rostoucím počtem stěn mnohostěnu se tomuto číslu opravdu blížíme.

Tab.2.3

Název mnohostěnu	Počet stěn	$\frac{\text{Objem koule vepsané}}{\text{Objem mnohostěnu}}$	$\frac{\text{Povrch koule vepsané}}{\text{Povrch mnohostěnu}}$
čtyřstěn	4	0,302	0,302
krychle	6	0,524	0,524
osmistěn	8	0,605	0,605
dvanáctistěn	12	0,755	0,755
dvacetistěn	20	0,829	0,829
šestadvacetistěn	26	0,845	0,853
dvaatřicetistěn	32	0,883	0,890

Výpočty poměrů objemů a povrchů těles z tab.2.3 jsou doloženy v příloze B.



poměr objemu a povrchu koule vepsané ku objemu a povrchu
n-stěnu v závislosti na *n*
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,302
0,524
0,605
0,755
0,829
0,845
0,854
0,883
0,890
4
6
8
12
20
26
32
poměr objemů
poměr povrchů

Graf 2.3

3 Výběr kartografického zobrazení

Tato kapitola se bude zabývat kartografickým problémem tvorby pseudoglóbů, tedy hlavním tématem práce. K dispozici jsou nyní vhodná tělesa a mapový podklad. Dále je potřeba nalézt nejvhodnější způsob, jak mapu na mnohostěny aplikovat.

3.1 Polyedrická zobrazení

Polyedrické zobrazení v podstatě není označením pro samotné kartografické zobrazení, ale pro systém, který organizuje již známá, vhodně definovaná kartografická zobrazení. Dalšími označeními tohoto zobrazení je *mnohoúhelníkové zobrazení*, *zobrazení po vymezených částech* či *víceplošné soustavy*. Používá se v případě zobrazení území větší rozlohy, které se samozřejmě nachází na zakřivené ploše. Zobrazením většího území na jednu plochu by totiž docházelo k velkým hodnotám zkreslení, která už nejsou žádoucí. Aby se zkreslení udržela v určitých mezích, je nutné území rozdělit na dílčí plochy a každou pak do roviny zobrazit individuálně. Velikost plochy dílčího území je pak ovlivněna maximální hodnotou zkreslení v krajních bodech, kterou jsme schopni akceptovat. V případech kdy se polyedrické zobrazení používá, jsou vytvořeny elementární sféroidické lichoběžníky nebo elementární rovnoběžkové či poledníkové pásy. Pro každou takto vymezenou oblast se zvolí určitý zobrazovací postup, kterým se provede zobrazení do roviny. Pro každou část platí samostatná souřadnicová soustava. Výhodou tohoto způsobu je dodržený stanovený limit zkreslení, jak bylo řečeno. Nevýhodou je skutečnost, že mapy není možno sestavit vedle sebe a nad sebou bez vzniku spár či překrytu.

V případě této práce, která si klade za cíl tvorbu pseudoglóbů, není důležité, jak velkého zkreslení bude v krajních částech jednotlivých ploch dosaženo (i když je to také sledováno), ale spíše výběr a vhodné rozmístění ploch do mnohostěnu pravidelně aproximujícího kouli. Prakticky je pak odsunuta i nevýhoda nemožnosti bezesparého sestavení map vedle sebe, protože výstupem je především jejich skladba v prostoru, která ve výsledku opíše kouli.

3.1.1 Využití polyedrických zobrazení

Zobrazení koule na krychli nebo mnohostěn se v minulosti samozřejmě již objevilo. Např. B.J.S.Cahill publikoval zobrazení Země na osmistěn roku 1912 a síť tohoto mnohostěnu dostala označení „motýlek“. Přesto zajímavějším a účelnějším výstupem než plochá síť je prostorový model osmistěnu.

Většího významu než zobrazení území na pravidelný mnohoúhelník, v minulosti mělo a má zobrazení na sféroidické lichoběžníky a poledníkové a rovnoběžkové pásy.

Sférické lichoběžníky se použily např. pro zobrazení pro Mezinárodní mapu světa 1 : 1 000 000 nebo při zobrazení topografických map bývalého Rakouska-Uherska.

Příkladem zobrazení na poledníkové pásy je Gauss-Krügerovo zobrazení, systém UTM, Cassini-Soldnerovo zobrazení a v podstatě se používá i na vyhotovení běžně používaných globusů se zobrazením poledníkových pásů na válec (na zobrazení pólových vrchlíků je použito azimutální zobrazení).

Rovnoběžkové pásy se používají pro letecké navigační mapy 1 : 500 000 nebo Mezinárodní mapu světa 1 : 2 500 000. Zajímavostí je, že o tomto způsobu uvažoval i Ing. Josef Křovák při navrhování zobrazení bývalého Československa. Převzato z [2].

3.2 Úvaha pro výběr vhodného zobrazení

Celá práce se zabývá polyedrickým zobrazením. Tedy zobrazením, kdy zobrazovaná plocha je rozdělena na n-úhelníky, z nichž každý zobrazuje určitou část zobrazovaného povrchu a tyto n-úhelníky na sebe navazují (viz. kapitola 3.1). Polyedrické zobrazení, a tedy i pracovní postup této práce, má dvě základní fáze. Nejdříve je potřeba vhodně rozdělit území Země na mnohoúhelníky, a poté pro každý vybrat vhodné kartografické zobrazení, kterým se na něj zobrazí příslušná část území tak, aby v průběhu hranic mnohoúhelníků na sebe sousední zobrazení navazovala. Už zde je naznačeno, že není příliš podstatné, jak se bude zkreslený mapový podklad chovat v ploše mnohoúhelníku, ale záleží na tom, aby byl stejný průběh zobrazení v délce stran mnohoúhelníků, které spolu sousedí.

Kritériem, ze kterého vycházíme, je skutečnost, že každá společná strana dvou mnohoúhelníků je úsečka, tedy spojnice dvou bodů. Je tedy třeba nalézt takovou spojnici dvou bodů a taková zobrazení, aby tato spojnice měla v obou stejnou polohu. Pokud se zvolí extrémní případ – nejkratší spojnice dvou bodů, kterou je na kulové referenční ploše část hlavní kružnice, tedy ortodroma [2], zbývá najít zobrazení, ve kterém se ortodroma zobrazuje jako přímka. Takovým zobrazením je gnomonická projekce.

Proveďme zpětnou úvahu. Zobrazíme-li hrany libovolného mnohostěnu, vepsaného kouli středovým promítáním, ze středu této koule na její plochu, dostaneme na povrchu koule obrazy hran mnohostěnu jako části hlavních kružnic (hlavní kružnice jsou kružnice se středem ve středu koule). Hrany se zkrátka zobrazí jako ortodromy. Opišme nyní kouli mnohostěn o počtu stěn *n*, čímž kouli obklopíme *n* tečnými rovinami. Provedeme-li nyní středové promítání ze středu koule, tak na tečných rovinách získáme obrazy ortodrom jako přímek (seskupených tak, že budou vytvářet mnohoúhelníky). A to je hlavní myšlenkou a řešením zobrazení Země na mnohostěnech. Promítání na každou tečnou rovinu si vyžádá sestrojení vlastní gnomonické projekce, ale z výše uvedeného vyplývá, že vzájemné napojení výsledků projekcí v ortodromách zajistí napojení zobrazeného mapového podkladu.

3.3 Gnomonická projekce

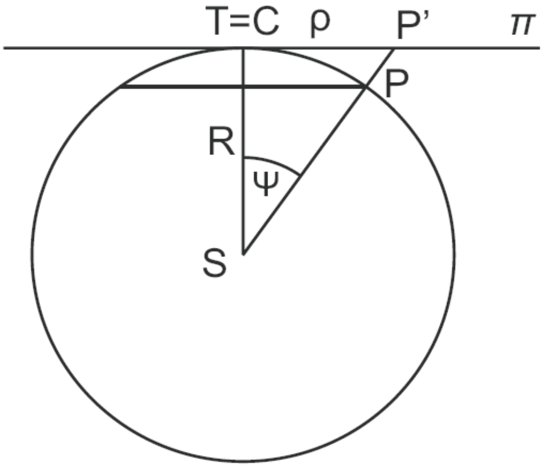
3.3.1 Popis

Gnomonická projekce je jedním z typů azimutálních zobrazení. V literatuře včetně [2] bývá obyčejně podán výklad k azimutálním projekcím, a poté rozdělení na speciální případy, mezi které patří i projekce gnomonická. Pro potřebu této práce postačí vysvětlení gnomonické projekce. Obecné znění zobrazovacích rovnic bude též upraveno pro gnomonickou projekci.

Jedná se o promítání povrchu referenční koule o poloměru R ze středu koule S na rovinu π, která je tečnou rovinou koule v bodě dotyku T. Jde vlastně o speciální typ kuželového zobrazení, kdy rozevření kuželové plochy je provedeno až do přímého úhlu. Bod dotyku T je na výsledném průmětu středovým bodem a v dalším textu je označován jako projekční centrum gnomonické projekce C. Jak je patrné z obrázku 3.3, bod P na povrchu referenční kulové plochy je promítán do roviny π v pozici P', která je určena polárními souřadnicemi ρ, ε.

Pro gnomonickou projekci platí poměrně zjednodušené zobrazovací rovnice:

$$\rho = Rtg\psi\ ,\ \varepsilon = D\ . \qquad (3.1, 3.2)$$



Obr.3.3

Polární úhel je roven kartografické délce a průvodič (polární délka) je funkcí pouze úhlu ψ, protože vzdálenost středu promítání S od centra C o velikosti R se nemění. Souřadnice v rovině π lze vyjádřit i rovinnými pravoúhlými souřadnicemi:

$$X = Rtg\psi \cos D\ , \qquad (3.3)$$

$$Y = Rtg\psi \sin D\ . \qquad (3.4)$$

Důležitými vztahy pro další práci jsou výrazy pro zkreslení:

délková zkreslení: $m_a = \dfrac{1}{\cos^2\psi},\ m_h = \dfrac{1}{\cos\psi}$ (3.5, 3.6)

plošné zkreslení: $P = \dfrac{1}{\cos^3\psi}$ (3.7)

úhlové zkreslení: $\sin\dfrac{\Delta\omega}{2} = tg^2\dfrac{\psi}{2}\ .$ (3.8)

Uvedené vztahy jsou úpravou obecných tvarů rovnic pro obecnou formu azimutální projekce, jejichž odvození najdeme v [2]. Ze vztahů (3.5) až (3.8) je zřejmé, že gnomonická projekce není zobrazením ekvivalentním, konformním ani ekvidistantním. Zejména fakt, že nezachovává délky, které se značně zkreslují při větší vzdálenosti od středu mapy C, se projevuje na první pohled. Je ale potřeba zmínit důležitou vlastnost: všechny hlavní kružnice se zobrazují do roviny jako přímky. Je to důsledek centrálního promítání, protože hlavní kružnice jsou kružnice se středem ve středu referenční koule. Uvedená vlastnost je vlastností unikátní [2] a velice cennou.

Poledníky se tedy v gnomonické projekci zobrazí vždy jako přímky. Stejně tak rovník. Geometrie obrazů rovnoběžek závisí na místě přiložení tečné roviny ke kouli. Pokud je zvolena pólová projekce (bod dotyku T na obrázku 3.3 je pólem), rovnoběžky o zeměpisné šířce U se zobrazí jako soustředné kružnice o poloměru $R\mathrm{cotg}U$ (zachovává se jejich geodetická křivost). Obrazy poledníků se sbíhají v pólu. V rovníkové (transverzální) projekci (bod dotyku T leží na rovníku) se obrazy rovnoběžek zobrazují jako hyperboly se středem na rovníku a obrazy poledníků tvoří osnovu rovnoběžných přímek. Uvedené skutečnosti jsou čerpány z [1] a jsou patrné z přiložených výstupů práce (poledníkovou i rovníkovou gnomonickou projekci zároveň lze pozorovat např. u jednoho ze zobrazení Země na krychli). V obecné poloze se obrazy poledníků sbíhají do obrazu zemského pólu. Obraz dotykové rovnoběžky je parabolou, rovnoběžky od ní směrem k pólu se v průmětu jeví jako elipsy, směrem k rovníku se jeví jako hyperboly [1].

3.3.2 Užití

Veškeré využití gnomonické projekce a gnomonických map těží z uvedené vlastnosti, že v gnomonické mapě je obraz každé hlavní kružnice přímkou. Tato projekce byla známa již ve starověku a dokonce ji znal již Thales (Thales z Milétu; řecký filosof a matematik; okolo 624 př.n.l. – okolo 548 př. n. l.) a Anaximandros – jeho žák nakreslil údajně první gnomonickou mapu hvězdné oblohy, jak je uvedeno v [1]. Někdy je gnomonická mapa nazývána ortodromická. Zákres ortodromy do této mapy pomáhá při sestrojení ortodromy v mapách jiného zobrazení. V geodézii a navigaci se pomocí gnomonické mapy mohou snadno řešit některé úlohy (průsečík dvou ortodrom, protínání vpřed nebo zpět na kouli). Užívá se v letectví, námořní plavbě a v radiogoniometrii (určování polohy letadla nebo lodi pomocí radiových vln).

3.4 Alternativní zobrazení

Vhodné zobrazení pro účel práce je tedy zvoleno. V jednom případě je však pro zajímavost uvedena alternativa. Jde o zobrazení Země na krychli s vložením zeměpisných pólů do středů protilehlých stěn. Dělení mapy pro jednotlivé mnohoúhelníky neprobíhá po obrazech ortodrom, ale po obrazech rovnoběžek a poledníků. Protože se jedná o hotový produkt předdefinovaný programem, můžeme typ použitého zobrazení pouze odhadovat. Na stěnách, zobrazující rovník, se zdá být použito zobrazení válcové v normální poloze, ekvidistantní v polednících (tzv. čtvercová mapa). V rozvinuté válcové ploše jsou pak zobrazeny 4 stěny krychle vedle sebe, oddělené obrazy poledníků, jež jsou přímkami. Zbývá vyřešit jejich navázání na pólové stěny. To se děje po rovnoběžkách, které jsou zde také přímkami. Na stěny, ve kterých je umístěn pól je snad použito nepravé válcové přímkové zobrazení, v němž se jeví poledníky i rovnoběžky jako přímky.

4 Praktická část

Dosud bylo stanoveno, že naprosto vhodným kartografickým zobrazením pro zobrazení zemského povrchu na povrch mnohostěnu je gnomonická projekce. Nyní bude popsán vliv konkrétního pravidelného mnohostěnu na definici gnomonické projekce, kterou se na jeho plochy zobrazí mapový podklad. Poté budou popsány úkony s digitální podobou mapového podkladu s použitím příslušného softwarového vybavení.

4.1 Pracovní postup

Obecný pracovní postup matematických výpočtů a další práce (GIS software a grafický program) pro tvorbu modelu každého mnohostěnu se skládá z následujících kroků:

1. Výpočet zeměpisných souřadnic projekčních center gnomonické projekce a zeměpisných souřadnic vrcholů mnohostěnu
2. Příprava prostředí ArcGIS. Otevření, tvorba a příprava souborů
3. Definování kartografického zobrazení
4. Vynesení vrcholů mnohostěnu pro daný mnohoúhelník do mapy
5. Nastavení měřítka
6. Export mapy
7. Ořez mapy dle spojnic vynesených vrcholů do tvaru mnohoúhelníku v grafickém programu
8. Opakování kroků 3 až 7 pro každý mnohoúhelník mnohostěnu
9. Seskupení všech mnohoúhelníků do sítě mnohostěnu
10. Případné grafické doplnění okolí hotové sítě mnohostěnu
11. Tisk sítě mnohostěnu na papír
12. Výřez a skládání

Gnomonickou projekci je potřeba nadefinovat, a mapu tak znovu zobrazit, tolikrát, kolika stěnami mnohostěn disponuje. Bod C, který je projekčním centrem gnomonické projekce, zobrazující mapu pro daný mnohoúhelník, je zároveň geometrickým středem tohoto mnohoúhelníku a také bodem dotyku s koulí opsanou dotyčnému tělesu. Je to právě ten bod, ve kterém je dosaženo nulového zkreslení a měřítko vzhledem ke kouli je zachováno. V dalším textu bude C často označován jen jako projekční centrum. Na počátku je třeba provést úvahu, jak mapový podklad na povrch tělesa umístit. Existuje samozřejmě nekonečně mnoho poloh mapy vzhledem k povrchu tělesa, ale některá z nich jsou speciální a pro nás zajímavá i z hlediska „urovnaně“ vypadající zeměpisné sítě. Jde o případy, kdy byly póly vloženy do středů protilehlých stěn mnohostěnů a zeměpisná síť tak vykazuje pravidelnost (najdeme skupiny stěn, kde se síť poledníků a rovnoběžek chová stejně). Dalším speciálním případem je vložení pólů do protilehlých vrcholů tělesa. Vliv na úhlednost zeměpisné sítě je stejný. U těch mnohostěnů, kde se nabízelo volit geografické póly ve středech stěn protilehlých mnohoúhelníků, se výpočet dvou projekčních center velmi zjednodušil. Tam, kde byly póly vloženy do vrcholů mnohostěnu, se zjednodušil výpočet souřadnic dvou pólů. Pokrytí mnohostěnu mapou světa v obecné poloze bylo provedeno spíše pro zajímavost a to v jednom případě – na šestistěnu.

4.1.1 Výpočet zeměpisných souřadnic projekčních center gnomonické projekce a zeměpisných souřadnic vrcholů mnohostěnu

Jednodušším výpočtem je výpočet zeměpisné délky projekčního centra i vrcholů, protože tělesa vykazují vyšší pravidelnost obvodu řezu „rovnoběžkovou“ rovinou nežli rovinou „poledníkovou“. U výpočtu zeměpisné délky postačí zvolit hodnotu souřadnice jednoho vrcholu či centra a další pak následují v rozpětí 360° rovnoměrným dělením. Výpočetní postup zeměpisné šířky bodů probíhá zpravidla na určitém osovém řezu tělesem, který je veden tak, aby procházel příslušnými vrcholy a projekčními centry. Postup nelze popsat obecně pro všechna tělesa, proto budou uvedeny jednotlivě. Použité vztahy pro některé prvky budou čerpány z tab.2.2.1 nebo bude uvedeno jinak. Výpočty budou prováděny základními trigonometrickými vztahy pro pravoúhlý i obecný trojúhelník. Hodnoty goniometrických funkcí před výpočtem úhlu jsou uváděny v neusměrněných zlomcích.

Bude-li v textu psáno o souřadnicích nebo zeměpisných souřadnicích, budou myšleny souřadnice zeměpisné šířky φ (kladná = severní, narůstá od rovníku k severnímu pólu, <0°, +90°>; záporná = jižní, její absolutní hodnota narůstá od rovníku k jižnímu pólu, <0°, -90°>) a zeměpisné délky λ (kladná = východní, narůstá-li východně od nultého poledníku, <0°, +180°>; záporná = západní, narůstá-li její absolutní hodnota od nultého poledníku na západ, <0°, -180°>; v textu ale mnohem častěji uváděno v rozmezí <0°, +360°>).

Je dobré provést úvahu o počtu desetinných míst výsledných hodnot úhlů, tedy o výsledné přesnosti určení souřadnic bodů na kouli. Výstupem jsou rastrová data zobrazující skutečnost v měřítku 1 : 100 mil. o rozměru jednoho pixelu 0,085 mm (odpovídá rozlišení 300 DPI). Jeden pixel tedy zobrazuje území o délce 8,5 km a to odpovídá v obloukové míře délce 0°4,6'. *Uvažována je Země tvaru koule o poloměru 6 380 km, která tak má obvod 40 087 km (na hlavní kružnici, kde také leží všechny zájmové body), tudíž 0,1" odpovídá na Zemi vzdálenosti 3,1 m.* Pro vynesení souřadnic bodů do mapy by tedy stačilo zobrazit body s přesností na úhlové minuty (0°1'). Z hlediska návaznosti výpočtů a možnosti dalšího využití vypočítaných souřadnic k jiným účelům jsou souřadnice udávány s přesností na 0,000 001° což představuje přesnost 0° 0' 0,1".

Vysvětlení symbolů v uvedených obrázcích osových řezů:

S...geometrický střed tělesa, střed koule opsané, střed koule vepsané

PS...severní pól

PJ...jižní pól

C1, C2,...projekční centra gnomonických projekcí pro jednotlivé stěny

V_1, V_2,*...vrcholy mnohostěnu*

H1, H2,...body na hranách (v řezu)

u_s*...velikost stěnové úhlopříčky*

v...velikost stěnové výšky (v trojúhelníku)

r...poloměr koule tělesu opsané

ρ...poloměr koule tělesu vepsané

4.1.1.1 Výpočet na čtyřstěnu

K výpočtům byl použit osový řez (osa je totožná s přímkou, která je definována geometrickým středem tělesa a jedním z jeho vrcholů) obsahující stranu *a*. Plocha řezu má tvar rovnoramenného trojúhelníka o stranách *a, v, v*. Vedení řezu tělesem je vyznačeno na obr. 4.1.1.1. *v* je vypočteno jako výška v rovnostranném trojúhelníku a je rovno $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

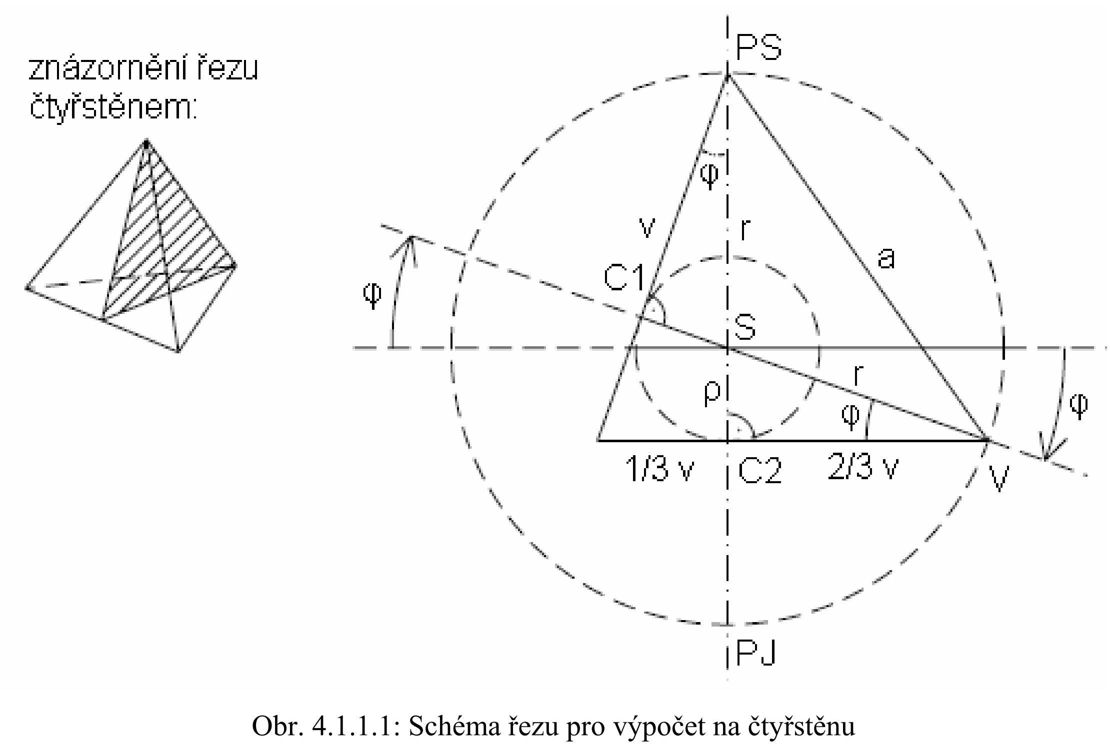
Severní pól byl vložen do vrcholu mnohostěnu, jižní pól potom do středu protilehlé stěny. Jeden z dalších vrcholů mnohostěnu bude mít zeměpisnou délku 0°, další dva pak 120° a 240° (rozestup je dán hodnotou *π/n, kde n=3 je počet stěn vybíhajících z vrcholu*). Projekční centra zhotovených gnomonických projekcí budou mít zeměpisnou délku počínaje 60° rovněž po 120°.

Výpočet zeměpisné šířky vrcholů mnohostěnu byl proveden jako výpočet úhlu φ, který se objevuje v pravoúhlém trojúhelníku *SC2V.* Dále se úhel φ objevuje jako 90°+φ v trojúhelníku *PSVS*. Situace je znázorněna na obr. 4.1.1.1.

Výpočet:

$$\sin(\varphi) = \frac{\rho}{r} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{12}a}{\frac{\sqrt{6}}{4}a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = 19{,}471221°$$

Zeměpisná šířka vrcholů mnohostěnu bude tedy -19°28'16,4". Na základě podobnosti s trojúhelníkem *SC2V* lze nalézt úhel φ i v trojúhelníku *SC1PS* a tedy zbývající (středový) úhel v tomto trojúhelníku získáme jako 180°-(90°+ φ). Doplněk tohoto úhlu do 90° je zeměpisná šířka projekčního centra C a tudíž je stejné hodnoty jako zeměpisná šířka vrcholů, ale s opačným znaménkem.



Obr. 4.1.1.1: Schéma řezu pro výpočet na čtyřstěnu

Výsledné souřadnice bodů na čtyřstěnu jsou vyneseny v tabulkách 4.1.1.1.a, 4.1.1.1.b.

Tab.4.1.1.1.a: Souřadnice vrcholů čtyřstěnu

bod	φ	λ
1	+ 90°	(severní pól)
2	- 19°28'16,4"	0°
3	- 19°28'16,4"	120°
4	- 19°28'16,4"	240°

Tab.4.1.1.1.b: Souřadnice projekčních center čtyřstěnu

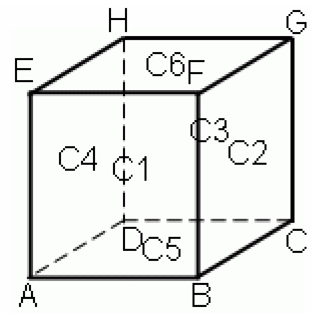
bod	φ	λ
A (2 3 1)	+ 19°28'16,4"	60°
B (3 4 1)	+ 19°28'16,4"	180°
C (4 2 1)	+ 19°28'16,4"	300°
D	- 90°	(jižní pól)

Pozn.: popis v závorce za body A, B, C značí, kterými body je vymezena stěna, uprostřed níž bod leží.

4.1.1.2 Výpočet na šestistěnu

V případě krychle se nabízí dva speciální případy, jak na povrch tělesa efektně umístit mapový podklad. Prvním je umístění pólů do středů protilehlých stěn, druhým pak umístění pólů do protilehlých vrcholů. Zároveň je na krychli, jako na jediném z prezentovaných mnohostěnů, ukázáno i zobrazení mapového podkladu v obecné poloze. A zejména pak v přílohách, v podobě modelů, je předloženo zajímavé srovnání tří různých poloh světové mapy na jednom mnohostěnu. Jinými slovy, Země je třikrát aproximována jedním geometricky totožným mnohostěnem, pokaždé v jiné poloze.

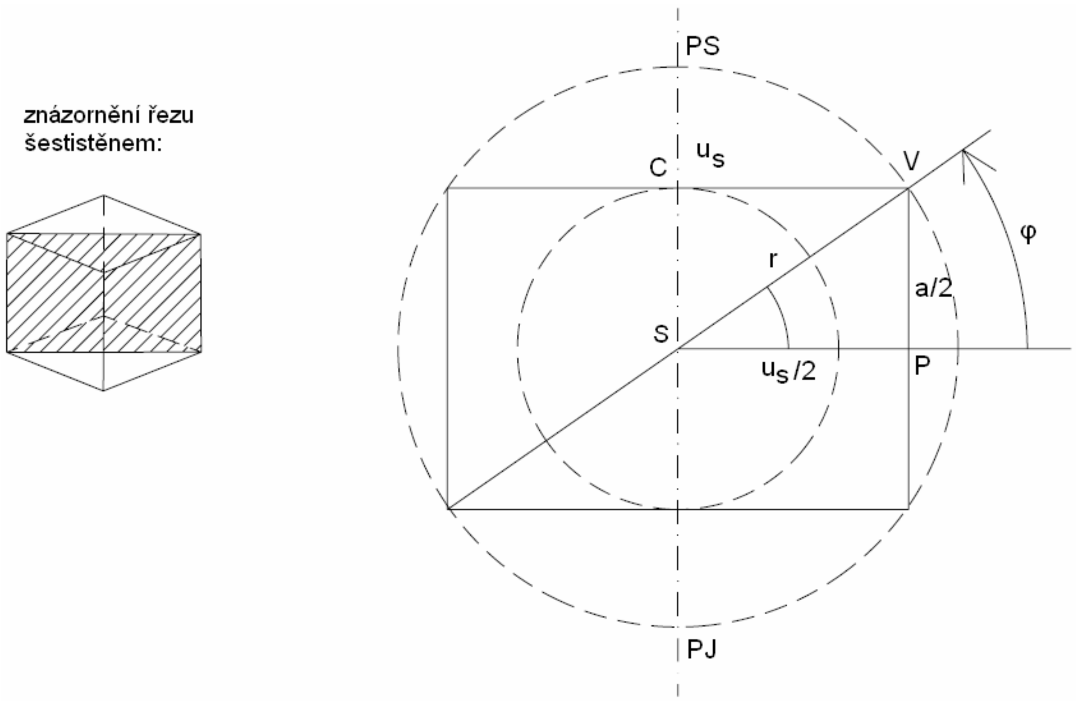
První případ, co se výpočtů souřadnic vrcholů mnohostěnu a středů stěn, jakožto projekčních center gnomonické projekce, týče, je nejjednodušší. Projekční centra leží na pólech a na rovníku, kde mají stejnou odlehlost v zeměpisné délce, 90°. Vrcholy pak mají zeměpisnou šířku vypočítanou z pravoúhlého trojúhelníku SPV v řezu krychlí obr.4.1.1.2.b.



Obr.4.1.1.2.a

Výpočet: $tg\varphi = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{u_s}{2}} = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 35{,}264390°$

Takže zeměpisná šířka vrcholů bude ±35°15'51,8". λ bude opět po 90° s tím, že oproti vrcholům jsou tyto souřadnice posunuty o *π/4* = 45°.



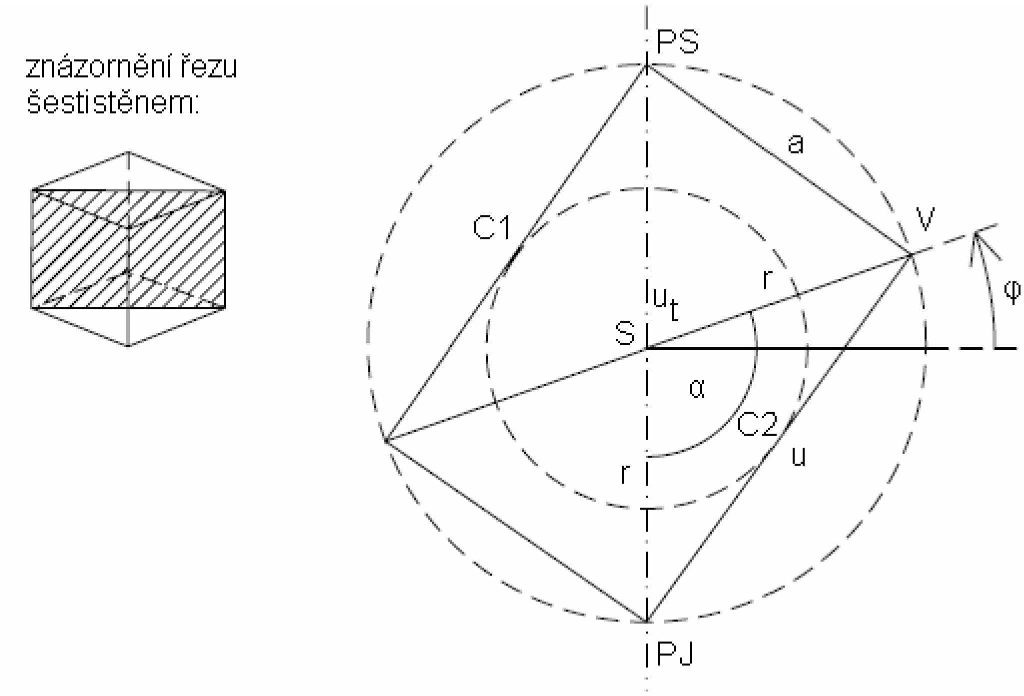
Obr.4.1.1.2.b: Schéma řezu pro výpočet na šestistěnu s vložením pólů do středů stěn

Tab. 4.1.1.2.a: Zeměpisné souřadnice důležitých bodů na krychli s umístěním pólů do středů stěn

Souřadnice vrcholů krychle			Souřadnice projekčních center		
bod	φ	λ	bod	φ	λ
A	-35°15'51,8"	0°	C1	0°	45°
B		90°	C2	0°	135°
C		180°	C3	0°	225°
D		270°	C4	0°	315°
E	+35°15'51,8"	0°	C5	-90°	(jižní pól)
F		90°	C6	+90°	(severní pól)
G		180°			
H		270°			

Výsledné shrnutí ukazuje tabulka 4.1.1.2.a (názvy vrcholů a středů stěn krychle v ní použité odpovídají popisu na obr. 4.1.1.2.a).

Druhým případem umístění mapy na krychli je vložení pólů do vrcholů. Tedy osa Země vložena do osy tělesa, která prochází jeho tělesovou úhlopříčkou. Tu obsahuje i řez, ve kterém bude proveden výpočet. Řez má plochu tvaru obdélníku s vrcholy ve vrcholech tělesa a je znázorněn na obr. 4.1.1.2.c.



Obr. 4.1.1.2.c: Schéma řezu pro výpočet na šestistěnu s vložením pólů do vrcholů

Systém souřadnic je tedy definován tak, že vrcholy krychle, které neleží v pólech, mají zeměpisnou šířku ±φ a z obr.4.1.1.2.c je zřejmé, že φ = α – 90°. Úhel α lze vypočítat z trojúhelníku SVPJ kosinovou větou (u je stěnová úhlopříčka ve čtverci, tedy $u = \sqrt{2}a$, r je zde poloměr koule opsané a zároveň polovina tělesové úhlopříčky $u_t = \frac{\sqrt{3}}{2}a$).

$$u^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos(90° + \varphi)$$

Výpočet: $$\left(\sqrt{2a}\right)^2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \cos(90° + \varphi)$$

Po úpravě dostáváme: $\cos(90° + \varphi) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = 19{,}471221°$

Zeměpisná šířka vrcholů mnohostěnu bude tedy 19°28'16,4" j.š. a 19°28'16,4" s.š.
Z obrázku 4.1.1.2.c je dále patrné, že zeměpisnou šířku projekčního centra (konkrétně *C2*) získáme doplňkem úhlu $\alpha/2$ do 90°, neboť spojnice středu S a C2 úhel α půlí. Zeměpisná šířka projekčních center bude tedy 35°15'51,8" j.š. a stejně tak s.š. Souhrnně jsou souřadnice bodů uvedeny v tabulce 4.1.1.2.b (názvy vrcholů a středů stěn krychle v ní použité odpovídají popisu na obr. 4.1.1.2.a).

Tab. 4.1.1.2.b: Zeměpisné souřadnice důležitých bodů na krychli s umístěním pólů do vrcholů

Souřadnice vrcholů			Souřadnice projekčních center		
bod	φ	λ	bod	φ	λ
A	- 90°	(jižní pól)	C1	- 35°15'51,8"	240°
B	- 19°28'16,39"	300°	C2	+ 35°15'51,8"	300°
C	+ 19°28'16,39"	0°	C3	+ 35°15'51,8"	60°
D	- 19°28'16,39"	60°	C4	- 35°15'51,8"	120°
E	- 19°28'16,39"	180°	C5	- 35°15'51,8"	0°
F	+ 19°28'16,39"	240°	C6	+ 35°15'51,8"	180°
G	+ 90°	(severní pól)			
H	+ 19°28'16,39"	120°			

Třetím prezentovaným **modelem** je umístění mapy na povrch tělesa v obecné poloze. Jednodušším způsobem, než propočítávat zeměpisné souřadnice na povrchu koule jako v předchozích případech, je vzít souřadnice speciální (jednoduché) polohy krychle z tab. 4.1.1.2.a a transformovat je do jiné souřadnicové soustavy. Půjde samozřejmě jen o otočení systému souřadnic (měřítko i poloha středu s.s. zůstanou stejné). Soustava souřadnic se nechá rotovat podle všech tří os pravoúhlého systému X, Y, Z o úhly velikosti 20° (libovolně zvolená hodnota).

Postup výpočtu rotace:

Jak bylo naznačeno, rotace bude provedena v pravoúhlých souřadnicích. V prostoru totiž lze rotovat pouze kartézskou soustavu souřadnic. Sférické souřadnice φ, λ nejsou v podstatě souřadnicemi kulové plochy, ale parametry, které ji určují. Postup tedy začne transformací φ, λ, H na pravoúhlé souřadnice. Tu netřeba řešit početně. Postačí umístit počátek pravoúhlé soustavy do středu krychle s orientací os kolmo na stěny krychle, a vrcholy tělesa pak budou mít souřadnice o složkách velikosti jedné. Co se týče třetí souřadnice H (výška, někdy také průvodič ρ), doplňující sférické parametry φ, λ, je uvedena spíše pro úplnost. Je zřejmé, že na výstupu z rotace si svou velikost zachová. V případě projekčních center má velikost poloměru koule R, v případě vrcholů pak polovinu tělesové úhlopříčky, $\sqrt{3}R$. Body z tab.4.1.1.2.a jsou uvedeny v pravoúhlých souřadnicích v tab.4.1.1.2.c.

Tab. 4.1.1.2.c: Pravoúhlé souřadnice bodů na krychli v poloze před rotací

bod	Souřadnice vrcholů			bod	Souřadnice projekčních center		
	X	Y	Z		X	Y	Z
A	1	-1	-1	C1	1	0	0
B	1	1	-1	C2	0	1	0
C	-1	1	-1	C3	-1	0	0
D	-1	-1	-1	C4	0	-1	0
F	1	1	1	C6	0	0	-1
G	-1	1	1	C5	0	0	1
H	-1	-1	1				
E	1	-1	1				

Takovéto souřadnice X,Y,Z jsou dále pro každý bod sestaveny do sloupcového vektoru $\bar{x}$, který je zleva násoben maticí rotace R za účelem zisku sloupcového vektoru $\bar{x}^R$, který obsahuje složky X',Y',Z' pootočené o zadané úhly rotace α, β, γ.

$$\bar{x}^R = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R.\bar{x} = \left(R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)\right)\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Dílčí matice rotace mají podobu:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad R_y = \begin{pmatrix} -\sin\beta & 0 & \cos\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\beta & 0 & \sin\beta \end{pmatrix} \quad R_z = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V tomto případě je lhostejné, v jakém pořadí se dílčí matice rotace skládají, protože nezáleží na tom, v jakém pořadí se rotace provádějí. Nutno ale poznamenat, že pořadí násobení dílčích matic rotací má vliv na výslednou podobu matice R. Výsledné pravoúhlé souřadnice v pootočené soustavě (tab.4.1.1.2.d) je třeba transformovat zpět na φ, λ. K tomu poslouží vztahy (4.2), (4.3) z [3].

$$\lambda = arctg\frac{Y'}{X'},\quad \varphi = arctg\frac{Z'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}} \qquad (4.2, 4.3)$$

Výsledné zeměpisné souřadnice bodů na krychli jsou uvedeny v tabulce 4.1.1.2.e.

Tab. 4.1.1.2.d: Pravoúhlé souřadnice bodů na krychli v poloze po rotaci

bod	Souřadnice vrcholů			bod	Souřadnice projekčních center		
	X'	Y'	Z'		X'	Y'	Z'
A	0,903649	-1,455895	-0,252562	C1	0,883022	-0,211471	0,418989
B	1,546436	0,390167	-0,675504	C2	0,321394	0,923031	-0,211471
C	-0,219608	0,813108	-1,513482	C3	-0,883022	0,211471	-0,418989
D	-0,862396	-1,032954	-1,090541	C4	-0,321394	-0,923031	0,211471
F	0,862396	1,032954	1,090541	C6	0,342020	-0,321394	-0,883022
G	-0,903649	1,455895	0,252562	C5	-0,342020	0,321394	0,883022
H	-1,546436	-0,390167	0,675504				
E	0,219608	-0,813108	1,513482				

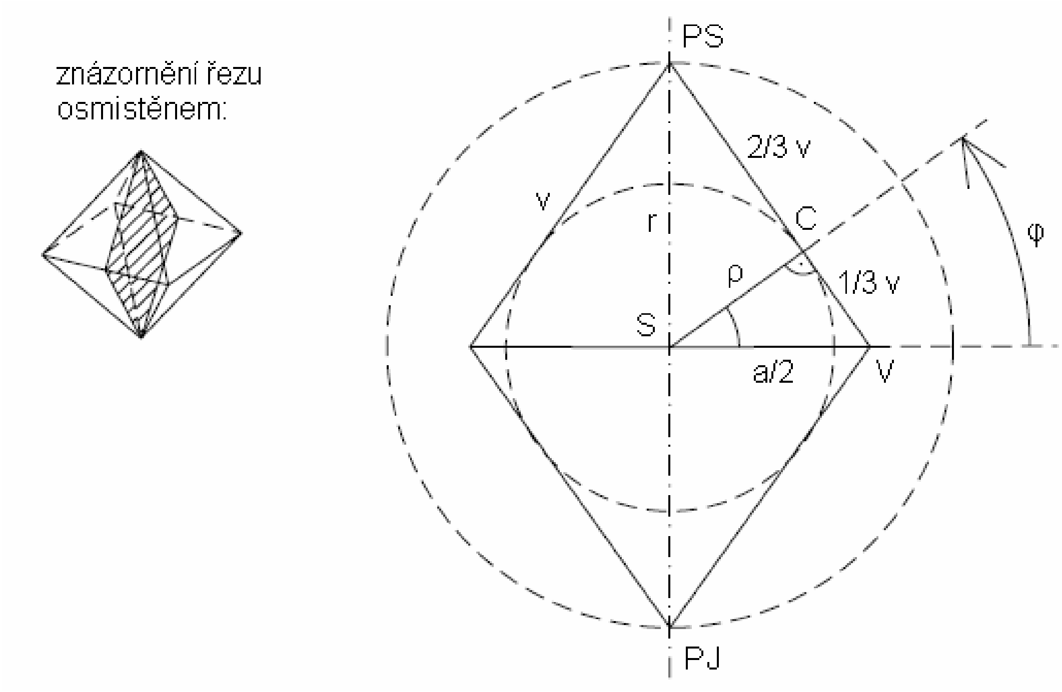
Tab. 4.1.1.2.e: Zeměpisné souřadnice důležitých bodů na krychli bez zvláštního umístění pólů

Souřadnice vrcholů			Souřadnice projekčních center		
bod	φ	λ	bod	φ	λ
A	-8°23'4,5"	301°49'37,7"	C1	24°46'14,8"	346°31'55,8"
B	-22°57'16,7"	14°9'36,8"	C2	-12°12'30,8"	70°48'7,9"
C	-60°54'15,7"	105°6'50,8"	C3	-24°46'14,8"	166°31'55,8"
D	-39°1'20,6"	230°8'31,4"	C4	12°12'30,8"	250°48'7,9"
E	39°1'20,6"	50°8'31,4"	C5	-62°0'32,8"	316°46'51,0"
F	8°23'4,5"	121°49'37,7"	C6	62°0'32,8"	136°46'51,0"
G	22°57'16,7"	194°9'36,8"			
H	60°54'15,7"	285°6'50,8"			

Posledním modelem, který je předveden, je zobrazení Země na krychli s vložením zeměpisných pólů do středů protilehlých stěn, ale bez použití gnomonické projekce. Model je samozřejmě, stejně jako ostatní, součástí přílohy D. Toto zobrazení je předdefinovaným zobrazením programem ArcGIS a využito jako alternativa pro srovnání se zobrazením gnomonickou projekcí. Typ použitého zobrazení je z části popsán v kap.3.4. Nebyly tedy prováděny žádné výpočty, ale je zřejmé, že souřadnice bodů téměř odpovídají souřadnicím pro gnomonickou projekci na stěnách krychle se stejným umístěním soustavy souřadnic. Jedinou vyjímkou je zeměpisná šířka vrcholů, která je zde $|\varphi| = 45°$.

4.1.1.3 Výpočet na osmistěnu

Zvolená poloha mapy vůči mnohostěnu je dána vložením geografických pólů do jeho protilehlých vrcholů. Výpočet souřadnic vrcholů je jednoduchý, všechny leží na pólech či na rovníku. Proto bude řez veden po výškách trojúhelníků, aby procházel projekčními centry. Plocha řezu má tvar kosočtverce, je ohraničena výškami stěnových rovnostranných trojúhelníků $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ a její vedlejší úhlopříčka je délky a. Více v obrázku 4.1.1.3.



Obr.:4.1.1.3: Schéma řezu pro výpočet na osmistěnu

Na obrázku 4.1.1.3 je vidět, že projekční centrum C dělí výšku *v* v poměru *1/3 : 2/3*. Vychází to ze známého faktu, že geometrický střed rovnostranného trojúhelníku, kterým je zároveň C, leží právě v tomto místě (průsečík těžnic, které jsou zároveň výškami), a dělí všechny výšky trojúhelníku v uvedeném poměru. Této skutečnosti bude bez dalšího vysvětlování, využito např. i u výpočtu dvacetistěnu.
Zjištění velikosti úhlu φ se provede z trojúhelníku *SVC*.

Výpočet: $\cos\varphi = \dfrac{\rho}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{6}a}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \varphi = 35{,}264389°$. Zeměpisná šířka projekčních center je tedy ±35°15"51,8". Vrcholy jsou, stejně jako u krychle s vložením pólů do vrcholů, v pólech, kde jsou jejich souřadnice zřejmé, a na rovníku. Odlehlost vrcholů i projekčních center v zeměpisné délce je 90° s tím, že vrcholy začínají na hodnotě λ = 0° a projekční centra na hodnotě o 45° větší. Kompletní výpis souřadnic všech bodů poskytuje tabulka 4.1.1.3.

Tab. 4.1.1.3: Zeměpisné souřadnice důležitých bodů na osmistěnu s umístěním pólů do vrcholů

Souřadnice vrcholů			Souřadnice projekčních center		
bod	φ	λ	bod	φ	λ
A	0°	0°	C1	+35°15'51,8"	45°
B		90°	C2		135°
C		180°	C3		225°
D		270°	C4		315°
E	- 90°	(jižní pól)	C5	- 35°15'51,8"	45°
F	+ 90°	(severní pól)	C6		135°
			C7		225°
			C8		315°

Souřadnice projekčních center na osmistěnu odpovídají souřadnicím vrcholů na krychli s umístěním pólů do středů protilehlých stěn. Stejně tak souřadnice projekčních center této krychle odpovídají souřadnicím vrcholů na osmistěnu. Je to důsledkem duality těchto těles (dualita viz kap. 2.2.1) a dobrou kontrolou výpočtů.

4.1.1.4 Výpočet na dvanáctistěnu

Orientace soustavy zeměpisných souřadnic je jednoznačně zvolena umístěním geografických pólů do geometrických středů protilehlých stěn. Na povrchu je dvacet vrcholů, a pro všechny je potřeba vypočítat souřadnice stejně, jako pro deset projekčních center (zbylá dvě jsou dány póly). Pro výpočty byl použit řez znázorněný a popsaný na obrázku 4.1.1.4. Plocha řezu je nepravidelný šestiúhelník o stranách délek *(r_s+ρ_s)*, *a*, ve kterém byly vypočítány středové úhly, jak je vyznačeno a ty následně použity pro výpočet zeměpisných šířek jednotlivých bodů.

Výpočet úhlu α z pravoúhlého trojúhelníku $SC1V_1$:

$$tg\alpha = \frac{r_s}{\rho} = \frac{\frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}}{10}a}{\frac{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}a} = \frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{25+11\sqrt{5}}} \Rightarrow \alpha = 37{,}377368°$$

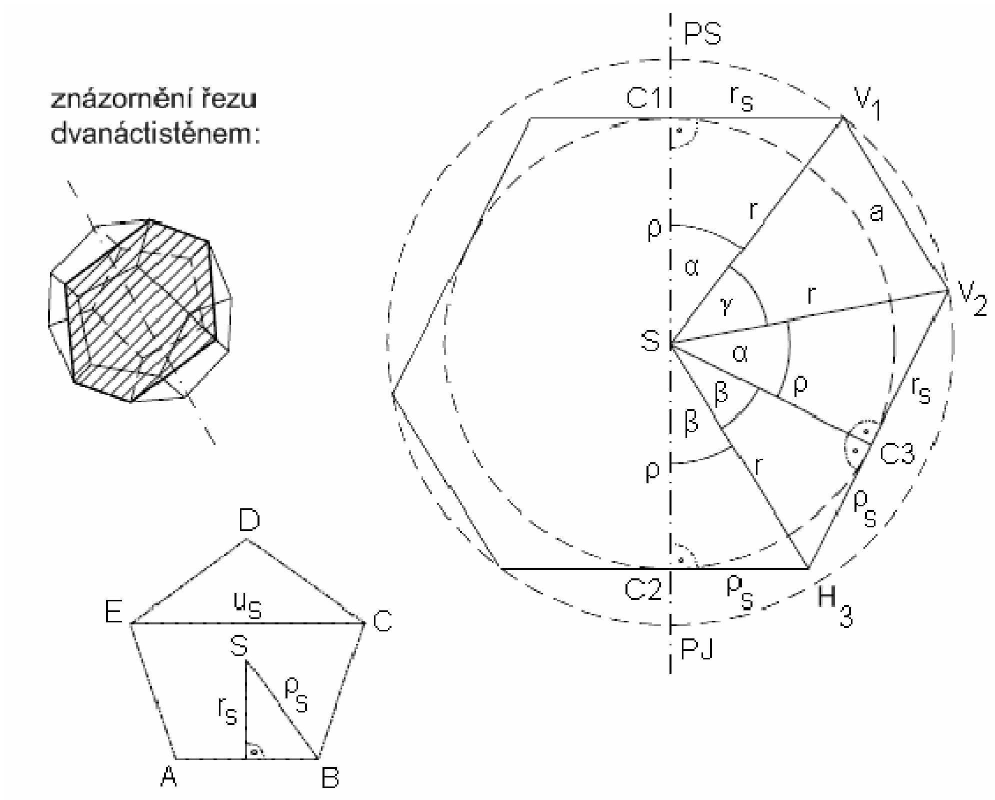
Vztah pro poloměr kružnice opsané stěnovému pětiúhelníku r_s je převzat z [4].

Na základě podobnosti trojúhelníků $SC1V_1$ a $SC3V_2$ se úhel α vyskytuje mezi hledanými dvakrát stejně jako úhel β v podobných trojúhelnících $SC2H_3$ a $SC3H_3$.

Výpočet úhlu β z pravoúhlého trojúhelníku $SC2H_3$:

$$tg\beta = \frac{\rho_s}{\rho} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{5}}}{\frac{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}a} = \frac{10\sqrt{2\sqrt{5}+5}}{\sqrt{50\left(25+11\sqrt{5}\right)}} \Rightarrow \beta = 31{,}717474°$$

Vztah pro poloměr kružnice vepsané stěnovému pětiúhelníku ρ_s je převzat z [4].



Obr.: 4.1.1.4: Schéma řezu pro výpočet na dvanáctistěnu

Výpočet úhlu γ z trojúhelníku SV_1V_2:

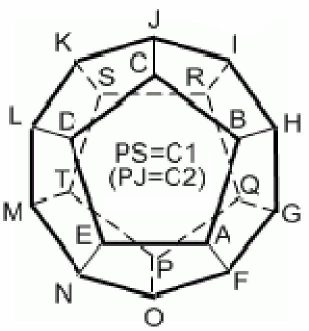
$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{2r^2 - a^2}{2r^2} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}a\right)^2 - a^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}a\right)^2} = \frac{5+3\sqrt{5}}{3(3+\sqrt{5})} \Rightarrow \gamma = 41{,}810315°$$

Kontrolou správnosti výpočtu je součet pěti středových úhlů (2α + 2β + γ) roven 180°, což je splněno.

Na povrchu mnohostěnu se v uvedené soustavě zeměpisných souřadnic vyskytují vrcholy o dvojí absolutní hodnotě zeměpisné šířky – vrcholy náležící mj. ke stěnám, v jejichž středech se nachází zeměpisné póly, a ostatní vrcholy (nacházející se v rovnoběžkovém pásu blíže rovníku). Zeměpisná šířka „vrcholů poblíž pólů“ je v absolutní hodnotě: $|\varphi_{V1}|$ = (90°-α) = 52,622632° = 52°37'21,5". Absolutní hodnota „vrcholů poblíž rovníku“ je: $|\varphi_{V2}|$ = (90°-(α+γ)) = 10,812317° = 10°48'44,3". Uvedené dvě hodnoty souřadnic vrcholů mají vždy stejné znaménko pro stejnou hodnotu λ. Zbývá určit φ polohy projekčních center. Jejich absolutní hodnota je: $|\varphi_C|$ = (90°-2β) = 26,565052° = 26°33'54,2". Výpis souřadnic všech vrcholů a center mnohostěnu poskytuje tabulka 4.1.1.4. Zeměpisná délka je určena svazkem paprsků poledníků, které vybíhají z pólu do vrcholů pólového n-úhelníku (n=5) a jejich odlehlost je tak dána jako 360°/n . λ jednoho z vrcholů byla zvolena na 0° a další tedy následují s odlehlostí 72°, taková je situace na severní polokouli (polovině mnohostěnu). Hodnoty λ na polokouli jižní jsou o 360°/2n odsazeny, protože obě poloviny mnohostěnu jsou o tuto hodnotu (kolem definované zemské osy) vzájemně pootočeny, což vychází z geometrie mnohostěnu.

Tab. 4.1.1.4: Zeměpisné souřadnice důležitých bodů na dvanáctistěnu s umístěním pólů do středů protilehlých stěn

<table>
<tr><td colspan="3">Souřadnice vrcholů krychle</td><td colspan="3">Souřadnice projekčních center</td></tr>
<tr><td>bod</td><td>φ</td><td>λ</td><td>bod</td><td>φ</td><td>λ</td></tr>
<tr><td>A</td><td rowspan="5">+52°37'21,5"</td><td>0°</td><td>C1</td><td>90°</td><td>(severní pól)</td></tr>
<tr><td>B</td><td>72°</td><td>C2</td><td>-90°</td><td>(jižní pól)</td></tr>
<tr><td>C</td><td>144°</td><td>C3</td><td rowspan="5">+26°33'54,2"</td><td>36°</td></tr>
<tr><td>D</td><td>216°</td><td>C4</td><td>108°</td></tr>
<tr><td>E</td><td>288°</td><td>C5</td><td>180°</td></tr>
<tr><td>F</td><td>+10°48'44,3"</td><td>0°</td><td>C6</td><td>252°</td></tr>
<tr><td>G</td><td>-10°48'44,3"</td><td>36°</td><td>C7</td><td>324°</td></tr>
<tr><td>H</td><td>+10°48'44,3"</td><td>72°</td><td>C8</td><td rowspan="5">-26°33'54,2"</td><td>0°</td></tr>
<tr><td>I</td><td>-10°48'44,3"</td><td>108°</td><td>C9</td><td>72°</td></tr>
<tr><td>J</td><td>+10°48'44,3"</td><td>144°</td><td>C10</td><td>144°</td></tr>
<tr><td>K</td><td>-10°48'44,3"</td><td>180°</td><td>C11</td><td>216°</td></tr>
<tr><td>L</td><td>+10°48'44,3"</td><td>216°</td><td>C12</td><td>288°</td></tr>
<tr><td>M</td><td>-10°48'44,3"</td><td>252°</td><td colspan="3" rowspan="8">popis vrcholů mnohostěnu:

</td></tr>
<tr><td>N</td><td>+10°48'44,3"</td><td>288°</td></tr>
<tr><td>O</td><td>-10°48'44,3"</td><td>324°</td></tr>
<tr><td>P</td><td rowspan="5">-52°37'21,5"</td><td>324°</td></tr>
<tr><td>Q</td><td>36°</td></tr>
<tr><td>R</td><td>108°</td></tr>
<tr><td>S</td><td>180°</td></tr>
<tr><td>T</td><td>252°</td></tr>
</table>

4.1.1.5 Výpočet na dvacetistěnu

U posledního platónského tělesa se nabízí takové uchopení, aby geografické póly ležely v protilehlých vrcholech. Řez tělesem pro výpočty je znázorněn na obrázku 4.1.1.5. Plocha řezu je plochou nepravidelného šestiúhelníku ohraničeného výškami a stranami rovnostranných trojúhelníků, z nichž je těleso složeno. Je třeba vypočítat polohu deseti dalších vrcholů a všech dvaceti projekčních center. Stejně jako u dvanáctistěnu se tak provede pomocí výpočtu středových úhlů.

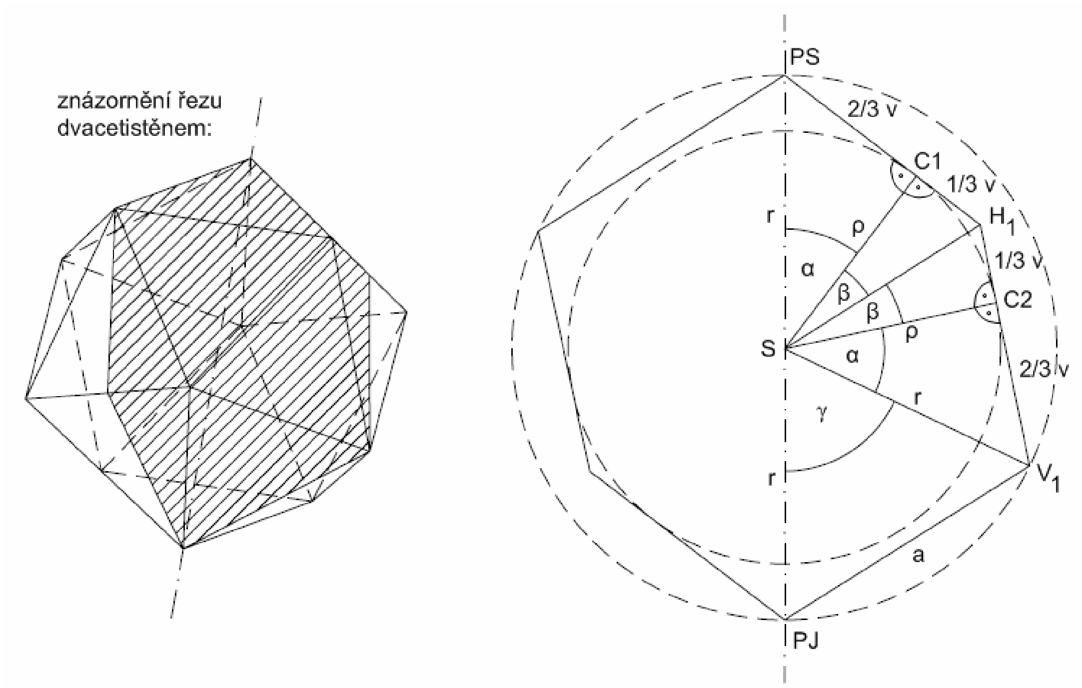
Výpočet úhlu α z pravoúhlého trojúhelníku SC1PS:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{2}{3}v}{r} = \frac{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \Rightarrow \alpha = 37{,}377368°$$

Výpočet úhlu β z pravoúhlého trojúhelníku SC1H1:

$$tg\beta = \frac{\frac{1}{3}v}{\rho} = \frac{\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{12}\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)} = \frac{2}{\left(3+\sqrt{5}\right)} \Rightarrow \beta = 20{,}905157°$$

Jak je vidět z obrázku 4.1.1.5, z podobnosti trojúhelníků SC1PS s SC2V1 a SC1H1 s SC2H1, tak úhel α i β se vyskytují v řezu dvakrát.



Obr.4.1.1.5: Schéma řezu pro výpočet na dvacetistěnu

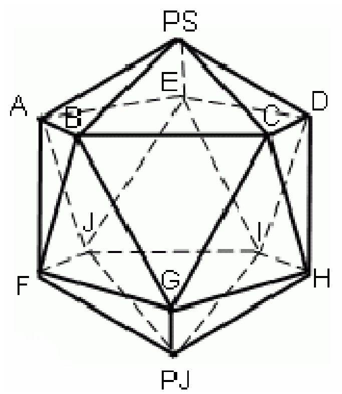
Výpočet úhlu γ z rovnoramenného trojúhelníku SV_1PJ:

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{2r^2 - a^2}{2r^2} = \frac{2\left(\frac{a}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2 - a^2}{2\left(\frac{a}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \Rightarrow \gamma = 63{,}434949°$$

Kontrolou správnosti výpočtu je součet pěti středových úhlů (2α + 2β + γ) roven 180°, což je splněno.

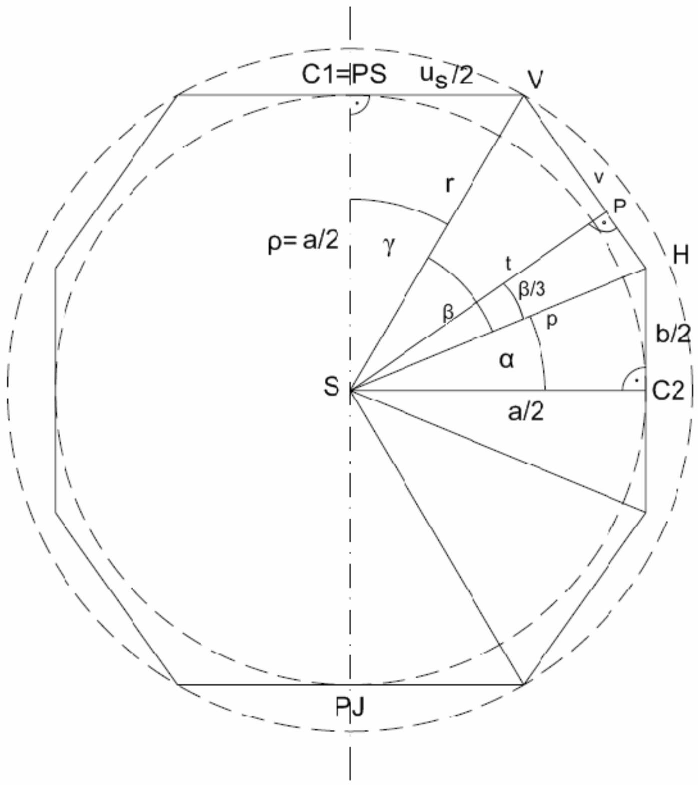
Tab. 4.1.1.5: Zeměpisné souřadnice důležitých bodů na dvacetistěnu s umístěním pólů do protilehlých vrcholů

<table>
<tr><th colspan="3">Souřadnice projekčních center</th><th colspan="3">Souřadnice vrcholů</th></tr>
<tr><th>bod</th><th>φ</th><th>λ</th><th>bod</th><th>φ</th><th>λ</th></tr>
<tr><td>C1</td><td rowspan="5">+52°37'21,5"</td><td>0°</td><td>PS</td><td>90°</td><td>(severní pól)</td></tr>
<tr><td>C2</td><td>72°</td><td>PJ</td><td>-90°</td><td>(jižní pól)</td></tr>
<tr><td>C3</td><td>144°</td><td>A</td><td rowspan="5">+26°33'54,2"</td><td>324°</td></tr>
<tr><td>C4</td><td>216°</td><td>B</td><td>36°</td></tr>
<tr><td>C5</td><td>288°</td><td>C</td><td>108°</td></tr>
<tr><td>C6</td><td>+10°48'44,3"</td><td>0°</td><td>D</td><td>180°</td></tr>
<tr><td>C7</td><td>-10°48'44,3"</td><td>36°</td><td>E</td><td>252°</td></tr>
<tr><td>C8</td><td>+10°48'44,3"</td><td>72°</td><td>F</td><td rowspan="5">-26°33'54,2"</td><td>0°</td></tr>
<tr><td>C9</td><td>-10°48'44,3"</td><td>108°</td><td>G</td><td>72°</td></tr>
<tr><td>C10</td><td>+10°48'44,3"</td><td>144°</td><td>H</td><td>144°</td></tr>
<tr><td>C11</td><td>-10°48'44,3"</td><td>180°</td><td>I</td><td>216°</td></tr>
<tr><td>C12</td><td>+10°48'44,3"</td><td>216°</td><td>J</td><td>288°</td></tr>
<tr><td>C13</td><td>-10°48'44,3"</td><td>252°</td><td colspan="3" rowspan="8">popis vrcholů mnohostěnu:

</td></tr>
<tr><td>C14</td><td>+10°48'44,3"</td><td>288°</td></tr>
<tr><td>C15</td><td>-10°48'44,3"</td><td>324°</td></tr>
<tr><td>C16</td><td rowspan="5">-52°37'21,5"</td><td>36°</td></tr>
<tr><td>C17</td><td>108°</td></tr>
<tr><td>C18</td><td>180°</td></tr>
<tr><td>C19</td><td>252°</td></tr>
<tr><td>C20</td><td>324°</td></tr>
</table>

Absolutní hodnota zeměpisné šířky vrcholů dvacetistěnu (kromě dvou bodů, kterými jsou póly) je: $|\varphi_V| = (90° - \gamma) = 26{,}565051° = 26°33'54{,}2''$. Poloha řady projekčních center, která jsou blíže pólům, má zeměpisnou šířku: $|\varphi_{C1}| = (90° - \alpha) = 52{,}622632° = 52°37'21{,}5''$. Projekční centra blíže k rovníku mají zeměpisnou šířku: $|\varphi_{C2}| = (90° - (\alpha+2\beta)) = 10{,}812318° = 10°48'44{,}3''$. Pro zeměpisnou délku bodů platí stejné rozpětí jako u dvanáctistěnu - začíná hodnotou 0° a další body na stejné rovnoběžce jsou rozmístěny rovnoměrně po 72°. Vedlejší řada bude o polovinu této hodnoty odsazena. Kompletní výpis souřadnic poskytuje tabulka 4.1.1.5.

Z porovnání tabulek 4.1.1.4 a 4.1.1.5 je patrné, že souřadnice vrcholů dvanáctistěnu odpovídají souřadnicím středů stěn dvacetistěnu a souřadnice vrcholů dvacetistěnu odpovídají souřadnicím středů stěn dvanáctistěnu. Tato zajímavost plyne ze vzájemné duality uvedených mnohostěnů (dualita viz kap. 2.2.1). Opět je to dobrou kontrolou výpočtu stejně jako u duality krychle s osmistěnem.

4.1.1.6 Výpočet na šestadvacetistěnu



Obr.4.1.1.6.a: Schéma řezu pro výpočet na šestadvacetistěnu

Toto těleso vzniklo ořezáním krychle o straně a. Póly byly umístěny do středů protilehlých čtverců, a osový řez pro výpočet byl veden po úhlopříčce tohoto čtverce, aby jeho plocha byla nepravidelným osmiúhelníkem popsaným na obr.4.1.1.6.a. Lze snadno odvodit, že délka hrany tělesa b bude: $b = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} a$. Výška trojúhelníkové stěny v bude: $\frac{\sqrt{3}}{2} b$, délka úhlopříčky pólového čtverce bude: $\sqrt{2} b$.

Výpočet středových úhlů je jednoduchý. Velikost úhlu α lze získat z pravoúhlého trojúhelníka *SC2H*:

$$tg\alpha = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 0{,}414214 \Rightarrow \alpha = 22{,}5°,$$

velikost úhlu γ pak z pravoúhlého trojúhelníka *SC1V*:

$$tg\gamma = \frac{\frac{u_s}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{u_s}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}a}{2+\sqrt{2}}\right)}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{2+\sqrt{2}} = 0{,}585786 \Rightarrow \gamma = 30{,}361193°.$$

V obou trojúhelnících se ještě vypočítá délka přepony *r* (zároveň poloměr koule tělesu opsané), respektive *p*. V trojúhelníku *VSH* se pak kosinovou větou vypočítá velikost úhlu β: $\cos\beta = \frac{r^2 + p^2 - v^2}{2rp} = 0{,}797176 \Rightarrow \beta = 37{,}138807°.$

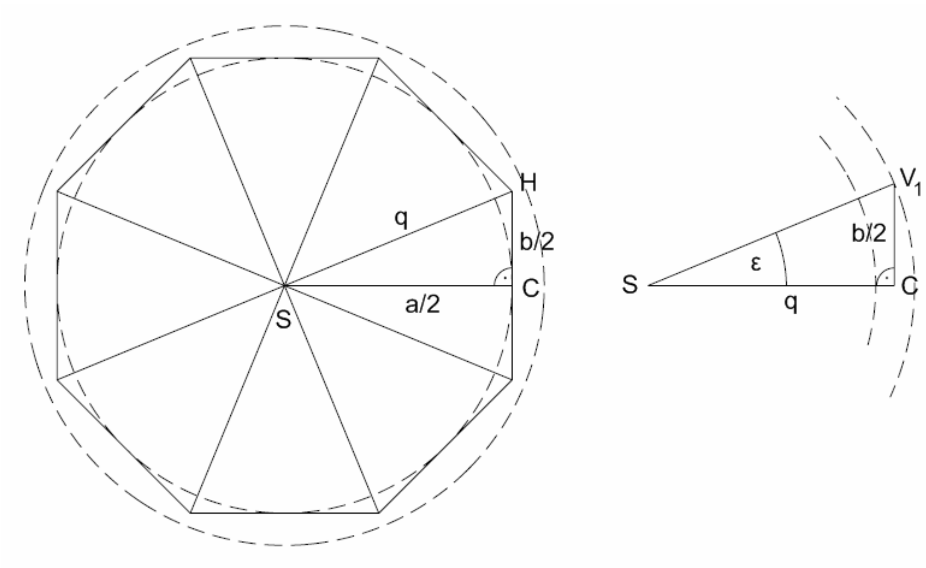
Kontrolou správnosti výpočtů je splnění rovnosti: α+β+γ = 90°, což je splněno.

Absolutní hodnota zeměpisné šířky vrcholů pólových čtverců odpovídá zeměpisné šířce vrcholů V, tudíž $|\varphi_V|$ = α+β = 59,638806° = 59°38'19,7". Zeměpisnou šířku ostatních vrcholů nelze vyvodit z uvedeného řezu, ale jde opět řešení pravoúhlých trojúhelníků naznačeném na obr.4.1.1.6.b. Nejdříve se vypočítá délka spojnice *q* středu tělesa a hrany v rovníkové rovině (Pythagorovou větou), poté se na této spojnici vztyčí kolmo pravoúhlý trojúhelník až k vrcholu V_1. V trojúhelníku se vypočítá velikost středového úhlu ε, který je zeměpisnou šířkou vrcholu. ε = 20,941020°. Projekční centra leží často na pólech nebo na rovníku. Zbylá mohou mít zeměpisnou šířku v ose středového úhlu, jež je vymezen stěnovým čtvercem. Tedy $|\varphi_{C1}|$ = 2α = 45° (pozn.: nelze odečíst z uvedeného řezu na obr.4.1.1.6.a). Nebo mohou mít projekční centra zeměpisnou šířku v 1/3 středového úhlu v případě trojúhelníku (tedy $|\varphi_{C2}|$ = α + β/3 = 34,879602 = 34°52'46,6").

Zeměpisná délka je určena pólovým čtvercem na hodnoty *n.90°*, kde *n = 0,1,2,3*. Další body vyžadují dělení 90° úseku napůl, případně ještě odsazení celé řady λ o 22,5°. Kompletní výčet souřadnic přináší tabulka 4.1.1.6.

Tab. 4.1.1.6: Zeměpisné souřadnice důležitých bodů na šestadvacetistěnu s umístěním pólů do protilehlých čtverců.

Souřadnice projekčních center			Souřadnice vrcholů		
bod	φ	λ	bod	φ	λ
1	+90°	(severní pól)	27	+59°38'19,7"	0°
2	+45°	45°	28		90°
3		135°	29		180°
4		225°	30		270°
5		315°	31	+20°56'27,7"	22°30'
6	+34°52'46,6"	0°	32		67°30'
7		90°	33		112°30'
8		180°	34		157°30'
9		270°	35		202°30'
10	0°	0°	36		247°30'
11		45°	37		292°30'
12		90°	38		337°30'
13		135°	39	-20°56'27,7"	22°30'
14		180°	40		67°30'
15		225°	41		112°30'
16		270°	42		157°30'
17		315°	43		202°30'
18	-34°52'46,6"	0°	44		247°30'
19		90°	45		292°30'
20		180°	46		337°30'
21		270°	47	-59°38'19,7"	0°
22	-45°	45°	48		90°
23		135°	49		180°
24		225°	50		270°
25		315°			
26	-90°	(jižní pól)			



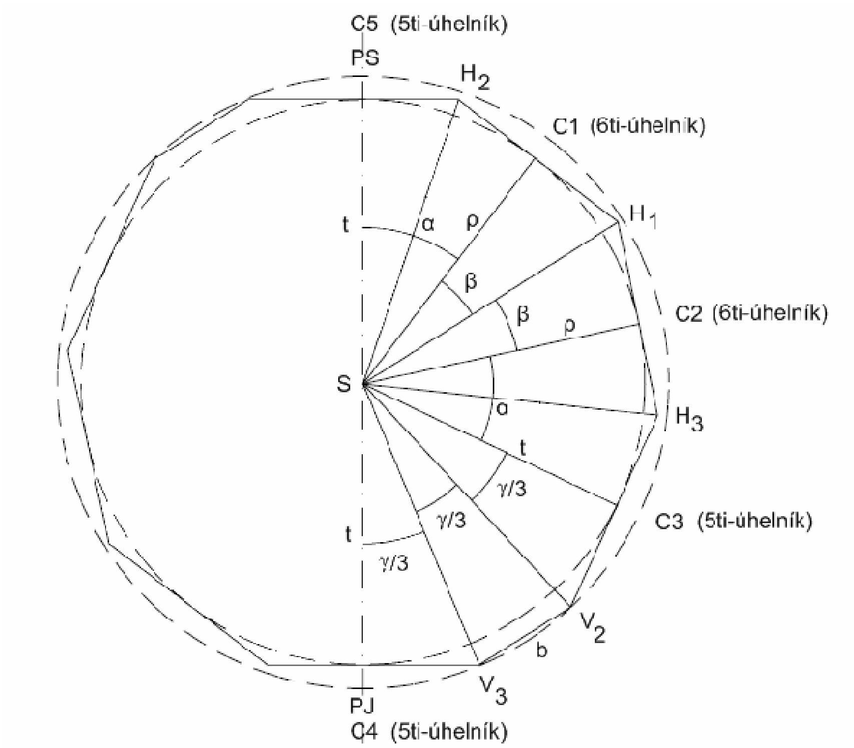
Obr.4.1.1.6.b

Z obrázku 4.1.1.6.a je patrné, že koule vepsaná se vůbec nedotýká trojúhelníkových stěn tělesa. To je skutečnost, kterou je potřeba zohlednit při volbě měřítka výstupu mapy zobrazené na tyto trojúhelníky. Gnomonická projekce totiž zobrazuje povrch Země pro všechny stěny na rovinu, která se jich dotýká. Stejným způsobem je obraz mapy vytvořen i u trojúhelníkových stěn. Tyto stěny jsou ale poté od povrchu koule vzdáleny a obraz je tedy potřeba ještě zvětšit. Tedy zvolit větší měřítko výstupu. Úprava měřítka je provedena v takovém poměru, v jakém jsou k sobě poměr koule tělesu vepsané ρ a poměr koule, která by se dotýkala trojúhelníkové stěny (tedy skutečná vzdálenost od středu tělesa ke středu trojúhelníkové stěny; označme ρ_3). Situaci opět popisuje obrázek 4.1.1.6.a. Délku t získáme z pravoúhlého trojúhelníku *SPH*. Výsledné měřítkové číslo m_3 výstupu zobrazení mapy na trojúhelníkových stěnách je tedy: $m_3 = m \cdot \dfrac{\rho}{\rho_3}$, *kde*

$\dfrac{\rho}{\rho_3} = \dfrac{a/2}{p.\cos(\beta/3)} = 0{,}94587233$. O velikosti m bude pojednáno v kapitole 4.1.5.

4.1.1.7 Výpočet na dvaatřicetistěnu

Výpočet na tomto Archimédovském tělese (Obr.2.2.2.h), bude probíhat poněkud jiným způsobem, protože je komplikovanější než mnohostěny uvedené doposud. Komolý dvacetistěn vznikne ořezáním vrcholů pravidelného dvacetistěnu (vznikne nová délka hrany b a platí: $b = a/3$). Orientaci soustavy souřadnic tedy ponecháváme stejnou jako u dvacetistěnu (póly se tedy dostávají z vrcholů tělesa do středů pětiúhelníkových stěn). To pro souřadnice projekčních center znamená, že budou stejné jako souřadnice projekčních center a vrcholů dvacetistěnu. Pro výpočet souřadnic vrcholů už bylo vycházeno z řezu tělesem na obrázku 4.1.1.7.a, který je odvozen z řezu dvacetistěnem na obrázku 4.1.1.5, tudíž všechna společná označení na obrázcích se shodují. V uvedeném řezu se ale vyskytují pouze některé vrcholy a ostatní je třeba dopočítat jiným způsobem, což se při práci ukázalo být nelehkým úkolem.



Obr.4.1.1.7.a: Schéma řezu pro výpočet na dvaatřicetistěnu

Možné způsoby výpočtu vrcholů tělesa, které neleží v uvedeném řezu, jsou:

1. zkonstruovat další řezy.
2. použít interpolace po hranách mnohostěnu, které spojují vrcholy o již známých zeměpisných souřadnicích.
3. použít sférické trigonometrie.

Uvedené způsoby se ale neukázaly jako vhodné z následujících důvodů:

ad 1. Bylo by zapotřebí zkonstruovat více než jeden další osový řez. Výpočet délek a úhlů v těchto nepravidelných obrazcích by byl mnohem složitější než vypočet v základním řezu. Postup by svou komplikovaností byl velkým zdrojem početních chyb. Postup nebyl realizován.

ad 2. Postup realizován byl, ale výstup byl chybný, což bylo zjištěno kontrolou odstupu výsledných vrcholů, který nebyl rovnoměrný.

ad 3. Postup byl realizován z části, ale výsledky byly posouzeny jako chybné.

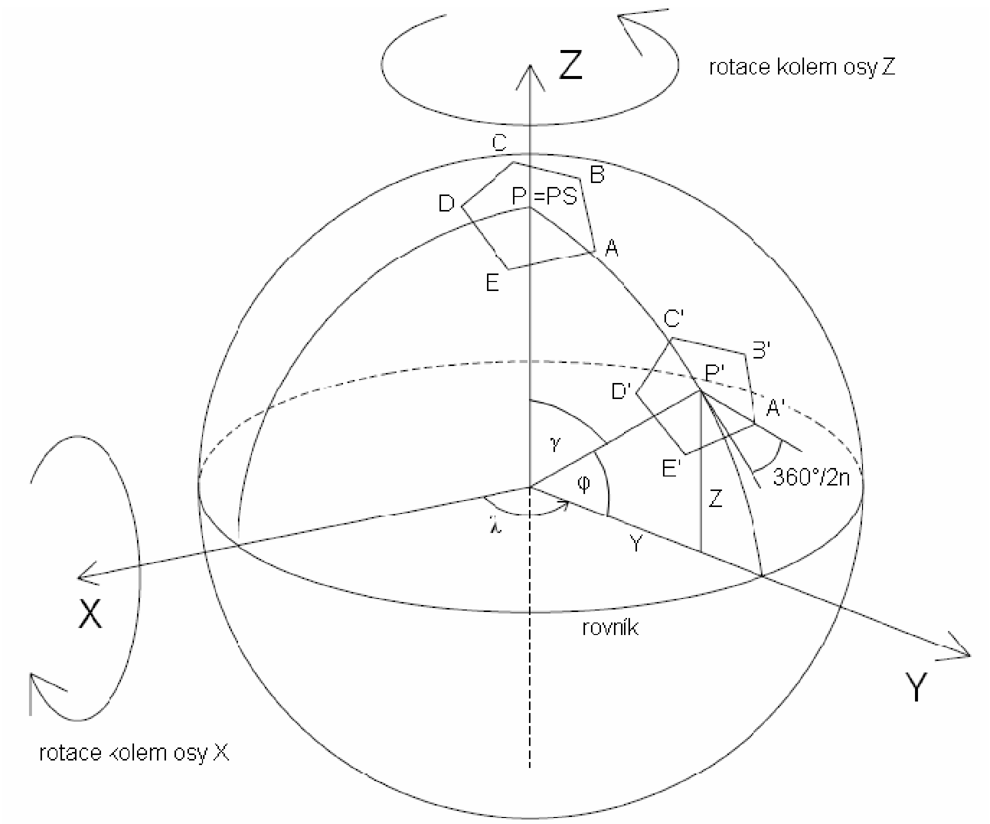
Společným jmenovatelem neúspěchu uvedených řešení je pak nerovnoměrná odlehlost vrcholů mnohostěnu v zeměpisné délce, se kterou je potřeba počítat.

Vhodným postupem se ukázal být výpočet vrcholů pólového pětiúhelníku a jejich následná rotace do jiného místa na mnohostěnu. Z dvacetistěnu je totiž známa vzájemná poloha vrcholů, které zde představují projekční centra pětiúhelníkových stěn. Všechny vrcholy mnohostěnu jsou součástí některého pětiúhelníka. Další šikovnou skutečností je prostorová podobnost polohy pětiúhelníků. Kromě pólových jsou zde dvě řady pětiúhelníků podél rovníku v místech, kde byly u dvacetistěnu vrcholy. Postačí vypočítat vzájemné vztahy vrcholů k projekčnímu centru v jednom nepólovém pětiúhelníku, a zbylé vrcholy v ostatních pětiúhelnících se dopočítají na základě znalosti poloh projekčních center. Zeměpisná šířka vrcholů na horní části mnohostěnu (severně od rovníku) je s opačným znaménkem platná pro vrcholy na dolní části. V zeměpisné délce jsou od sebe obě řady odsazeny o hodnotu 360°/2*n*, kde *n* je 5.

Zeměpisná šířka vrcholu pólového pětiúhelníku je $|\varphi_P| = 90° - \gamma/3 = 68{,}855017° = 68°51'18''$. Odlehlost paprsků vybíhajících z pólů do vrcholů pětiúhelníků určuje rozestup vrcholů v zeměpisné délce na 360°/*n*. Jeden z vrcholů má, již dříve stanovenou, hodnotu $\lambda = 36°$. Do rotace ale bude vstupovat s $\lambda = 90°$, aby bod ležel v rovině X = 0 m a v této rovině i rotoval, jak je naznačeno na obr. 4.1.1.7.b. Takto vrcholově určený pětiúhelník bude tedy otočen. V 4.1.1.2 bylo uvedeno, že rotovat ve sférických souřadnicích nelze, a proto je nutné na kouli převést souřadnice φ, λ, H na pravoúhlé X, Y, Z. Děje se tak podle vztahu z [3], [2]:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H\cos\varphi\cos\lambda \\ H\cos\varphi\sin\lambda \\ H\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Výška H je opět uvedena spíše pro úplnost, protože body si svou vzdálenost od středu koule zachovají. Výšku vrcholů označme H_V, projekční centra mají od středu koule vzdálenost H_C (přičemž platí: $H_V > H_C$; obě konstanty mají samozřejmě délkové jednotky). Sférické i pravoúhlé souřadnice vrcholů pólového pětiúhelníku ukazuje tabulka 4.1.1.7.a. Rotovat bude soustava podle osy X o úhel γ (značení v osovém řezu). Nejdříve se ale provede rotace kolem osy Z o úhel 360°/2*n*, aby výsledný pětiúhelník s původním směřovaly vrcholy k sobě tak, jak tomu má být. Pro uvedené pořadí rotací je nutné zachovat složení matice rotace R tak, jak uvádí vztah (4.1) korespondující s obrázkem 4.1.1.7.b. Úhel rotace kolem osy Z bude 36°. Kolem osy Y soustava rotovat nebude, a úhel rotace kolem osy X bude roven úhlu, který je na obr.4.1.1.7.a a obr.4.1.1.7.b znázorněn jako γ, tedy 63,434948°.



Obr.4.1.1.7.b: Rotace vrcholů pětiúhelníku

Tab. 4.1.1.7.a: Souřadnice vrcholů a projekčního centra na pólovém pětiúhelníku

Bod	Sférické souřadnice		Pravoúhlé souřadnice		
	φ [°]	λ [°]	X	Y	Z
A	68,855017	90	0	0,360729. H_V	0,932671. H_V
B	68,855017	162	-0,343074. H_V	0,111471. H_V	0,932671. H_V
C	68,855017	234	-0,212031. H_V	-0,291836. H_V	0,932671. H_V
D	68,855017	306	0,212031. H_V	-0,291836. H_V	0,932671. H_V
E	68,855017	378	0,343074	0,111471. H_V	0,932671. H_V
P	90		0	0	1. H_C

Tab. 4.1.1.7.b: Souřadnice vrcholů a projekčního centra na otočeném pětiúhelníku

Bod	Pravoúhlé souřadnice			Sférické souřadnice	
	X'	Y'	Z'	φ [°]	λ [°]
A'	$0{,}212031.\ H_V$	$0{,}964719.\ H_V$	$0{,}156077.\ H_V$	8,979258	102,395697
B'	$-0{,}343074.\ H_V$	$0{,}784354.\ H_V$	$0{,}516806.\ H_V$	31,118251	113,624397
C'	0	$0{,}672883.\ H_V$	$0{,}739749.\ H_V$	47,710034	90
D'	$0{,}343074.\ H_V$	$0{,}784354.\ H_V$	$0{,}516806.\ H_V$	31,118251	113,624397
E'	$-0{,}212031.\ H_V$	$0{,}964719.\ H_V$	$0{,}156077.\ H_V$	8,979258	102,395697
P'	0	$0{,}894427.\ H_C$	$0{,}447214.\ H_C$	26,565051	90

Tabulka 4.1.1.7.b obsahuje pravoúhlé souřadnice v otočené soustavě X'Y'Z' a dále převedené do sférických souřadnic podle vztahů (4.2, 4.3). Hodnoty zeměpisné délky λ odpovídají samozřejmě bodům obsaženým v pětiúhelníku s projekčním centrem o λ = 90°. Aby výsledné souřadnice byly použitelné pro výpočet vrcholů všech pětiúhelníků, je v tabulce 4.1.1.7.c proveden v zeměpisné délce přechod na rozdíly od projekčního centra.

Tab. 4.1.1.7.c: Souřadnice vrcholů a projekčního centra na každém pětiúhelníku

	|φ| [°]	λ [°]
projekční centrum	φ_C	λ_C
vrcholy	47,710034	λ_C
	31,118251	λ_C -23,624397
	8,979258	λ_C -12,395697
	8,979258	λ_C +12,395697
	31,118251	λ_C +23,624397

Rozložení vrcholů určujících pětiúhelník je z uvedených souřadnic zřejmé. Jak bylo uvedeno, zeměpisná šířka se na severní a jižní polokouli Země (horní a dolní části mnohostěnu) liší pouze ve znaménku. Posun bodů v zeměpisné délce je ošetřen výpočtem přes známé hodnoty λ_C.

Výsledné souřadnice jsou vyneseny v tabulkách 4.1.1.7.d a 4.1.1.7.e (řazení bodů je sestupně dle φ a dále vzestupně dle λ). Oproti dosud probíraným bodům, tabulky navíc obsahují, z výpočtu dvacetistěnu známé, projekční centra map zobrazených na šestiúhelnících.

Protože se jedná o těleso Archimédovské, tak stejně jako u šestadvacetistěnu, se koule vepsaná nedotýká některých stěn tělesa. – pětiúhelníkových (z obr.4.1.1.7.a to není příliš patrné). Z důvodu, který byl popsán v samém závěru kap.4.1.1.6, se provede úprava měřítka výstupu mapy pro pětiúhelníkové stěny v takovém poměru, v jakém jsou k sobě poměr koule tělesu vepsané ρ a poměr koule (se stejným středem), která by se dotýkala pětiúhelníkové stěny (označme ρ_5). Rozdíl poloměrů není velký. I to bylo důvodem, proč byla pro úpravu měřítka zvolena tentokrát jiná metoda. Dalším důvodem je širší výpočet, kterým je třeba se k délce ρ_5 propracovat. Bylo tedy postupováno grafickou metodou. Pětiúhelníková stěna byla exportována ve standardním měřítku a délka její strany porovnána s délkou strany šestiúhelníku. Jednoduše tak byl stanoven (pro několik dvojic obrazců) poměr, v jakém je třeba pětiúhelník zvětšit, aby do sítě mnohostěnu mohl být zakomponován. Z tohoto poměru bylo odvozeno měřítko výstupu m_5 mapy pro pokrytí pětiúhelníkových stěn jako: $m_5 = 0{,}97.\ m$. O velikosti m bude pojednáno v kapitole 4.1.5.

Tab. 4.1.1.7.d: Zeměpisné souřadnice projekčních center na dvaatřicetistěnu s umístěním pólů do protilehlých pětiúhelníků

bod	φ	λ	bod	φ	λ
C1	+90°	(severní pól)	C17	-10°48'44,3"	36°
C2	+52°37'21,5"	0°	C18		108°
C3		72°	C19		180°
C4		144°	C20		252°
C5		216°	C21		324°
C6		288°	C22	-26°33'54,2"	0°
C7	+26°33'54,2"	36°	C23		72°
C8		108°	C24		144°
C9		180°	C25		216°
C10		252°	C26		288°
C11		324°	C27	-52°37'21,5"	36°
C12	+10°48'44,3"	0°	C28		108°
C13		72°	C29		180°
C14		144°	C30		252°
C15		216°	C31		324°
C16		288°	C32	-90°	(jižní pól)

Tab. 4.1.1.7.e: Zeměpisné souřadnice vrcholů dvaatřicetistěnu s umístěním pólů do protilehlých pětiúhelníků

bod	φ	λ	bod	φ	λ
1	+68°51'18,1"	36°	31	-8°58'45,3"	12°22'32,2"
2		108°	32		59°37'27,8"
3		180°	33		84°22'32,2"
4		252°	34		131°37'27,8"
5		324°	35		156°22'32,2"
6	+47°42'36,1"	36°	36		203°37'27,8"
7		108°	37		228°22'32,2"
8		180°	38		275°37'27,8"
9		252°	39		300°22'32,2"
10		324°	40		347°37'27,8"
11	+31°7'5,7"	12°22'32,2"	41	-31°7'5,7"	23°36'15,5"
12		59°37'27,8"	42		48°23'44,5"
13		84°22'32,2"	43		95°36'15,5"
14		131°37'27,8"	44		120°23'44,5"
15		156°22'32,2"	45		167°36'15,5"
16		203°37'27,8"	46		192°23'44,5"
17		228°22'32,2"	47		239°36'15,5"
18		275°37'27,8"	48		264°23'44,5"
19		300°22'32,2"	49		311°36'15,5"
20		347°37'27,8"	50		336°23'44,5"
21	+8°58'45,3"	23°36'15,5"	51	-47°42'36,1"	0°
22		48°23'44,5"	52		72°
23		95°36'15,5"	53		144°
24		120°23'44,5"	54		216°
25		167°36'15,5"	55		288°
26		192°23'44,5"	56	-68°51'18,1"	0°
27		239°36'15,5"	57		72°
28		264°23'44,5"	58		144°
29		311°36'15,5"	59		216°
30		336°23'44,5"	60		288°

4.1.2 Příprava dat a software GIS

Vstupními produkty jsou mapový podklad a geometrická představa jeho aplikace na mnohostěn (viz. výpočet souřadnic důležitých bodů v kapitole 4.1.1). Použitý software je ArcGIS verze 9.3.

Jako mapový podklad byla zvolena mapa světa z webové mapové služby (WMS) ve dvou různých podobách:

Mapa světa Demis

Dostupné z URL: `www.demis.nl/home/pages/wms/docs/OpenGISWMS.htm`

Tato mapa světa se skládá z 20 vrstev, které se vzájemně doplňují a tvoří jeden celek. Při přiblíženích, se kterými se v této práci operuje, se ukázaly postačujícími pouhé tři: topografie (Topography), stínované znázornění reliéfu (Hillshading) a oceány se znázorněním hloubky (Bathymetry). Mapa je poskytována organizací Demis v rámci protokolu OpenGIS WMS. Tento mapový podklad byl použit pro zobrazení Země na čtyřstěn, šestistěn, osmistěn a dvacetistěn. Ukázka mapového podkladu v gnomonické projekci je v příloze C.

Mapa světa Blue Marble

Dostupné z URL: `http://wms.jpl.nasa.gov/wms.cgi`

Jak je uvedeno v [5], jde o odvozený obraz světa pořízený přístrojem MODIS z družice TERRA. Rozlišení mapy je uváděno 1 km, čehož samozřejmě v této práci není využito, protože není dosahováno tomu adekvátních přiblížení a měřítka výstupů map jsou malá. Stažený soubor obrazů JPL Global Imagery Service obsahuje soubor map z webového mapového serveru OnEarth. Celý (zdarma poskytovaný) komplet pochází z agentury NASA. Jedná se o 14 map, z nichž většina samostatně zobrazuje v určitém provedení celý svět. Mezi nimi je i upravený satelitní snímek Blue Marble, který přestal být v roce 2008 aktualizován, ale to opět pro účely této práce nic neznamená. Tento mapový podklad byl použit pro zobrazení Země na dvanáctistěn, šestadvacetistěn a dvaatřicetistěn. Ukázka mapového podkladu v gnomonické projekci je v příloze C.

Dalším prvkem je zeměpisná síť. Jak je zvykem, hustota rovnoběžek i poledníků byla navolena po 10°. Tloušťka čáry je 0,1 až 0,2 mm. Barva čar je volena černá pro mapu Demis, červená pro mapu Blue Marble.

4.1.3 Definování kartografického zobrazení

Navoleno bylo nové kartografické zobrazení (v programu označováno jako coordinate system). Celá definice spočívá ve výběru typu zobrazení (gnomonická projekce) a v zadání souřadnic projekčního centra gnomonické projekce ve stupních. Po odklepnutí se mapový podklad zkreslí podle zadaných požadavků.

4.1.4 Vynesení vrcholů mnohostěnu do mapy

Vhodným způsobem vyznačení vrcholů mnohoúhelníku do mapy se ukázalo být umístění dostatečně malých křížků. Alespoň vizuální kontrola jejich vzájemné polohy je ověřením, že ve výpočtu nenastala hrubá chyba nebo nebyly vyneseny body náležící gnomonické projekci, která je jinak nadefinována.

4.1.5 Nastavení měřítka

Za rozumné měřítko pro export mapy bylo stanoveno 1 : 100 000 000 (měřítkové číslo m = 100 000 000), což znamená, že skutečná zemská koule o poloměru R = 6380 km bude mít na výsledném modelu poloměr 6,4 cm. Výstupem práce však není model koule, ale její aproximace v podobě modelů mnohostěnů, které, s výjimkou rozměrnějšího čtyřstěnu, dosahují průměrného rozměru okolo 15cm. Uvedené měřítko je dost velké na to, aby se modely daly pohodlně sestavit a nebyl tento úkon prováděn na úkor čistoty výsledku. Na druhé straně je měřítko tak malé, aby se výsledná síť dala uložit na formát A2 (opět s výjimkou čtyřstěnu).

4.1.6 Export mapy

Výsledný exemplář je umístěn do tiskového rámce tak, aby v něm ležel celý mnohoúhelník a mapa je exportována ve formátu PNG. Důležitým bodem je nastavení rozlišení rastrového obrázku. Bylo odzkoušeno, že vhodným rozlišením je 300 DPI (přesnost zobrazení bodu viz. kap.4.1.1).

4.1.7 Zpracování mapy v grafickém programu

Pro další zpracování rastrových dat byl použit program CorelDRAW 12. Příprava prostředí spočívá pouze v nadefinování formátu papíru. Postupně byly importovány všechny obrázky, příslušnými nástroji ořezány dle spojnic vynesených vrcholů a seskupeny do připravené sítě mnohostěnu (tvorba sítí viz. kap.4.2). Protože je síť určena k prostorovému poskládání do modelu, je na místech, která to vyžadují, doplněna „křidélky“ pro budoucí nanesení lepidla.

4.1.8 Tvorba modelů

Poslední fázi tvoří modelářská práce. Tedy vyříznutí sítě mnohostěnu podle okolního obrysu, narýhování míst určených k ohybu, úvaha o postupu slepení, postupné nanášení lepidla a skládání.

4.2 Tvorba sítí mnohostěnů

Jedná se o vhodné seskupení pravidelných mnohoúhelníků stranami k sobě tak, aby bylo možné z výsledného útvaru složit požadované těleso. Autorovo zjištění je takové, že počet hran, ve kterých je potřeba mnohoúhelníky v síti spojit je přesně dán. Je to s-1, kde s je počet stěn tělesa. Počet volných hran, tedy počet všech stran v síti, které nespojují mnohoúhelník s jiným, pak musí být $2(h-(s-1))$, kde h je celkový počet hran tělesa. Kombinací spojení mnohoúhelníků do sítě mnohostěnu přibývá s rostoucím počtem stěn tělesa, ale počet je vždy konečný. Ne všechny kombinace jsou sítí mnohostěnu. Příklady sítí jednotlivých mnohostěnů jsou v příloze A.

5 Zhodnocení zobrazení

Každý mnohostěn má určitý počet ploch. S jejich rostoucím počtem se plocha stěny zmenšuje. Tím zkreslení, kterého je ne nich dosahováno, klesá, takový je předpoklad. V kapitole 2.3 jsme se přesvědčili, že s rostoucím počtem stěn se zlepšuje aproximace tvaru koule. To sebou musí logicky nést i menší zkreslení. Veškerá zkreslení jsou nulová v projekčním centru, případně v nekonečně malé ploše okolo projekčního centra. Směrem od tohoto bodu všechna zkreslení narůstají. V programu Projection bylo vypočítáno zkreslení délkové (v rovnoběžce i v poledníku: m_r, m_p), plošné i úhlové. Dále program počítá velikost poloos elipsy zkreslení, což je vlastně délkové zkreslení v hlavních směrech (maximální a minimální: m_a, m_h), a právě tato délková zkreslení jsou pro celý mnohostěn jednotná (v součinu dají hodnotu plošného zkreslení). Délková zkreslení m_r, m_p se v jednotlivých vrcholech mnohostěnu liší, neboť gnomonická projekce není zobrazením konformním, zkreslení tudíž závisí na směru. Mnohdy se stane, že m_r, m_p se s m_a, m_h shodují, ale nejvyšší hodnoty vždy dosahuje zkreslení m_a. Proto jsou zkreslení v hlavních směrech brána jako směrodatné hodnoty pro maximální zkreslení, kterého je na mnohostěnu dosaženo.

Tab.:5: Hodnoty zkreslení na mnohostěnech

mnohostěn	maximální zkreslení dosažené na mnohostěnu			
	délkové zkreslení m_a	délkové zkreslení m_h	plošné P	úhlové $\Delta\omega$ [°]
4-stěn	9,00000	3,00000	27,00000	60,00000
6-stěn	3,00000	1,73205	5,19615	31,08450
8-stěn	3,00000	1,73205	5,19615	31,08450
12-tistěn	1,58359	1,25841	1,99281	13,14040
20-tistěn	1,58359	1,25841	1,99281	13,14040
26-tistěn	1,34315	1,15894	1,55663	8,44389
32-tistěn	1,18582	1,08895	1,29130	4,88107

Po nadefinování typu zobrazení (gnomonická projekce), projekčního centra a referenční plochy, je program připraven počítat jednotlivá zkreslení. Poté už se zadávají souřadnice bodu, ve kterých mají být zkreslení vypočítána. Snahou je vypočítat maximální zkreslení, kterých je na povrchu mnohostěnu dosaženo. Postačí vypočítat zkreslení v jednom vrcholu jednoho mnohoúhelníku. V případě Archimédovských těles se počítá zkreslení v mnohoúhelníku s větším rozpětím. Přehled výsledných hodnot přináší tab.5.

Závěr

Práce ukázala možnost aproximace Země pravidelnými i polopravidelnými mnohostěny. Předpoklad, že s rostoucím počtem stěn tělesa, se zlepšuje aproximace koule, se potvrdil. To je patrné už ze skutečnosti, že s rostoucím počtem ploch tělesa, se k sobě přibližují plochy koule tělesu vepsané i opsané. Dále byl ukázán zvyšující se poměr objemu koule ku objemu mnohostěnu (platí i pro povrch) s rostoucím počtem stěn. Z toho samozřejmě plyne i vliv na kvalitu mapového pokryvu těles. Zkreslení dosažená na mnohostěnech se s rostoucím počtem stěn zmenšují.

Zabývat se pravidelnými mnohostěny znamenalo zajímavou práci a možnost nechat se překvapovat jejich vlastnostmi. Například dualita mnohostěnů sebou nese spoustu zajímavého. Navíc pravidelné a polopravidelné mnohostěny mají tak starý původ, jak staří jsou řečtí myslitelé, kteří je poprvé popsali. O filosofickém významu těchto těles se práce nezmiňuje, ale popis by to byl minimálně tak zajímavý, jako je ten matematický.

Prostorové modely, jakožto výstupy této práce, nemají v praktické kartografii velký význam. Uplatnění by snad mohly nalézt v reklamním průmyslu. Předměty jsou to velice poutavé a snadno by se mohly stát nositelem loga nejen kartografické společnosti, ale jakéhokoli subjektu, který by chtěl dát najevo například svou celosvětovou působnost. Skutečnost, že je Země „kulatá“, je již dávno neochvějně známa, a proto není nebezpečné pohrávat si s její „hranatou“ podobou. Práce ukázala, jak lze z plochého materiálu vymodelovat Zemi. Sestavit předtištěný pseudoglóbus je totiž mnohem jednodušší nežli sestavit kulatý glóbus. Tvar kulatého glóbu je nám dobře znám, ale odtrhnout zrak od různých podob pseudoglóbů není vůbec snadné. Právě nedokonalá aproximace koule způsobuje obrovskou atraktivitu těchto modelů Země.

Práci by bylo možné rozšířit i prohloubit. Rozšíření by znamenalo aplikaci zvoleného zobrazení na další tělesa (pokračování v řadě Archimédovských těles a zobrazovat Zemi na mnohostěny o více stěnách). Prohloubení by obnášelo hledat a zkoušet jiná kartografická zobrazení. Při použití gnomonické projekce však zůstává jediným vlivem na zkreslení mapy na povrchu mnohostěnu počet ploch mnohostěnu.

Zdroje informací

[1] BŐHM, Josef. *Matematická kartografie Díl 1. : Kartografické zobrazování*. Brno : Vědecko-technické nakladatelství, 1950. 260 s.

[2] BUCHAR, Petr. *Matematická kartografie*. 3. přepracované vydání. Praha : Nakladatelství ČVUT, 2007. 197 s. ISBN 978-80-01-03765-2.

[3] CIMBÁLNÍK, Miloš; ZEMAN, Antonín; KOSTELECKÝ, Jan. *Základy vyšší a fyzikální geodézie*. Vydání první. Praha : Nakladatelství ČVUT, 2007. 218 s.

[4] CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Pravidelné mnohostěny* [online]. [s.l.], 2007. 23 s. Oborová práce. Karlova Univerzita, Matematicko-fyzikální fakulta. Dostupné z WWW: <http://www.sgo.cz/stranky_predmetu/mat/studijni_literatura/Pravidelne_mnohosteny.pdf>.

[5] *Jet Propulsion laboratory : California Institute of Technology* [online]. 2008, 2008-10-24 [cit. 2010-05-10]. OnEarth. Dostupné z WWW: <http://wms.jpl.nasa.gov/>.

[6] MATOUŠEK, Jiří, NEŠETŘIL, Jaroslav. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 3. upr. vyd. Praha : Nakladatelství Karolinum, 2007. 423 s. ISBN 978-80-246-1411-3.

[7] *Origami* [online]. 2006 [cit. 2010-05-02]. Geometrická tělesa. Dostupné z WWW: <http://origami.webz.cz/matematika/pdf/telesa.pdf>.

[8] SLOVÁK, Jan. *Rovinné grafy: Stromy, konvexní mnohoúhelníky v prostoru a Platónská tělesa* [online]. 2006 [cit. 2010-02-07]. Dostupný z WWW: <http://is.muni.cz/el/1433/podzim2006/MB103/um/mIII-9.pdf?fakulta=1433;obdobi=3523;kod=MB103>.

Seznam příloh

Příloha A: Sítě mnohostěnů

Příloha B: Doplňkové výpočty

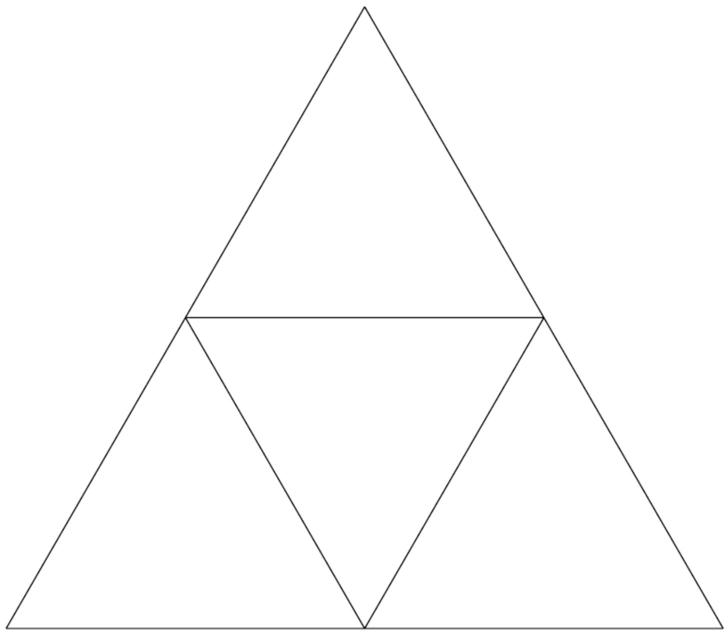
Příloha C: Ukázka použitého mapového podkladu

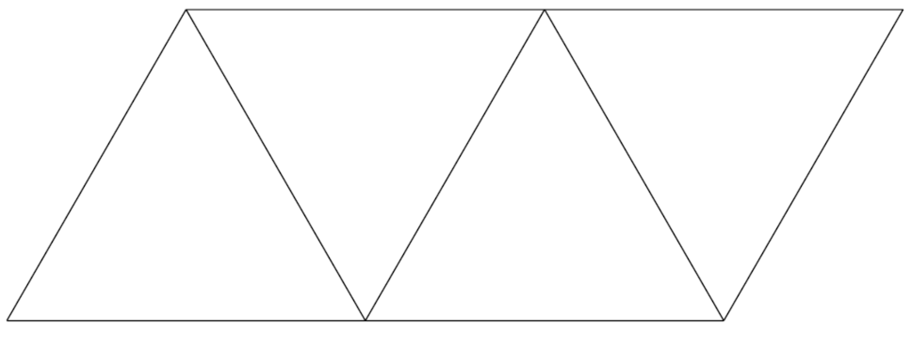
Příloha D: Zobrazení Země na mnohostěnech v sítích

Příloha E: Modely zobrazení Země na mnohostěnech

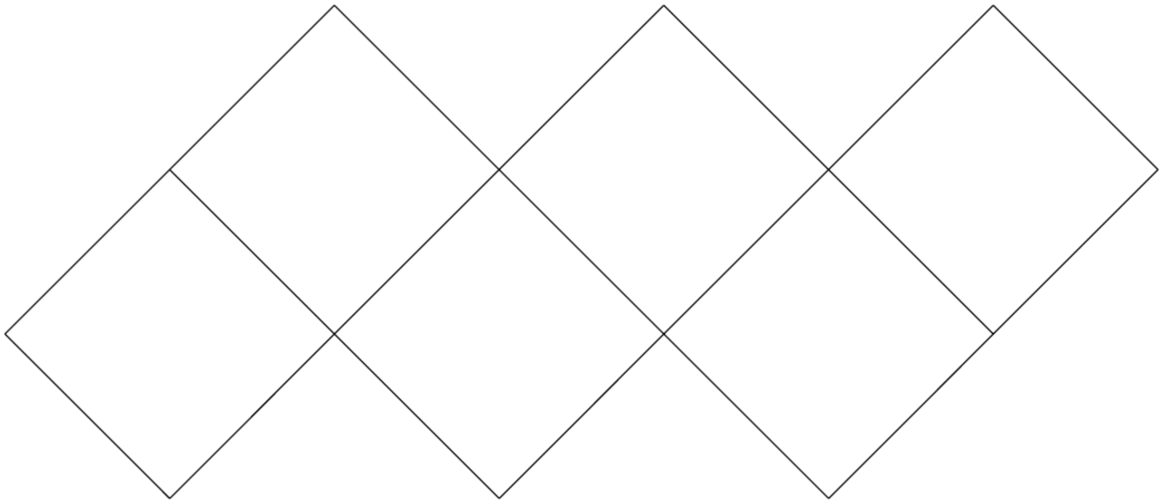
Příloha A: Sítě mnohostěnů

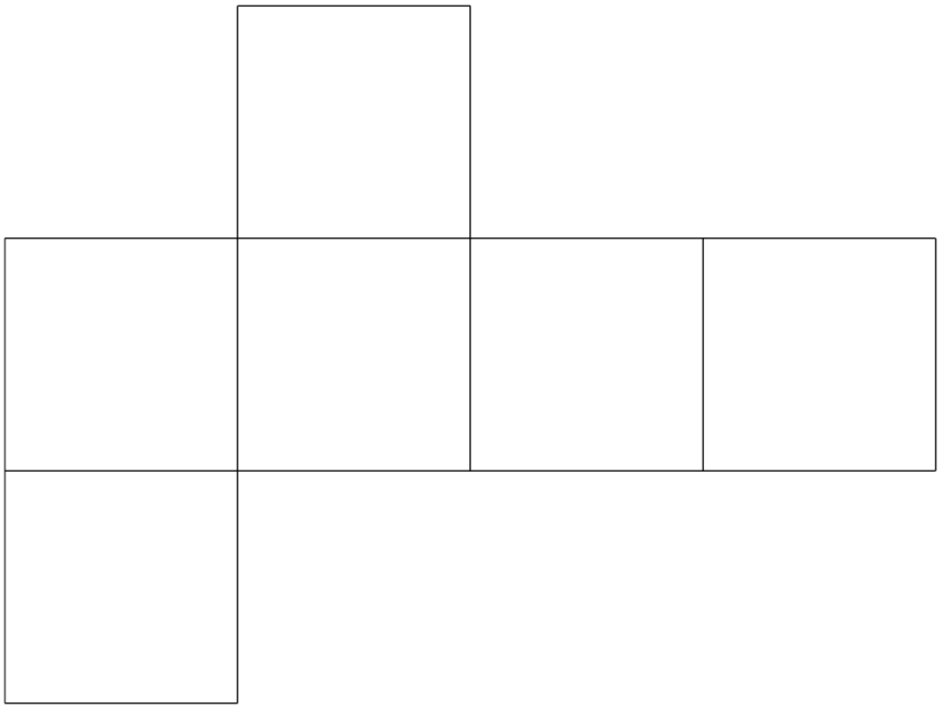
příklady sítí pravidelného čtyřstěnu:



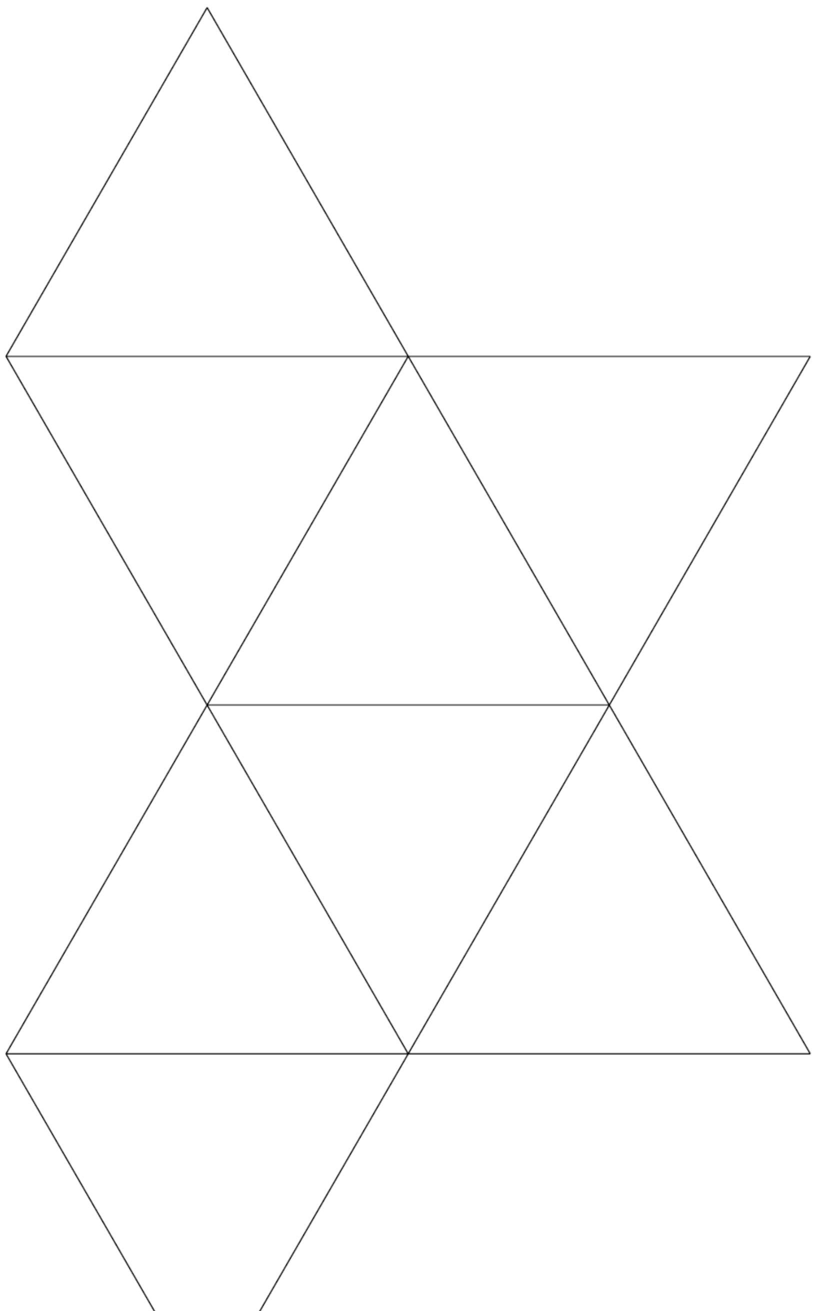


příklady sítí pravidelného šestistěnu:

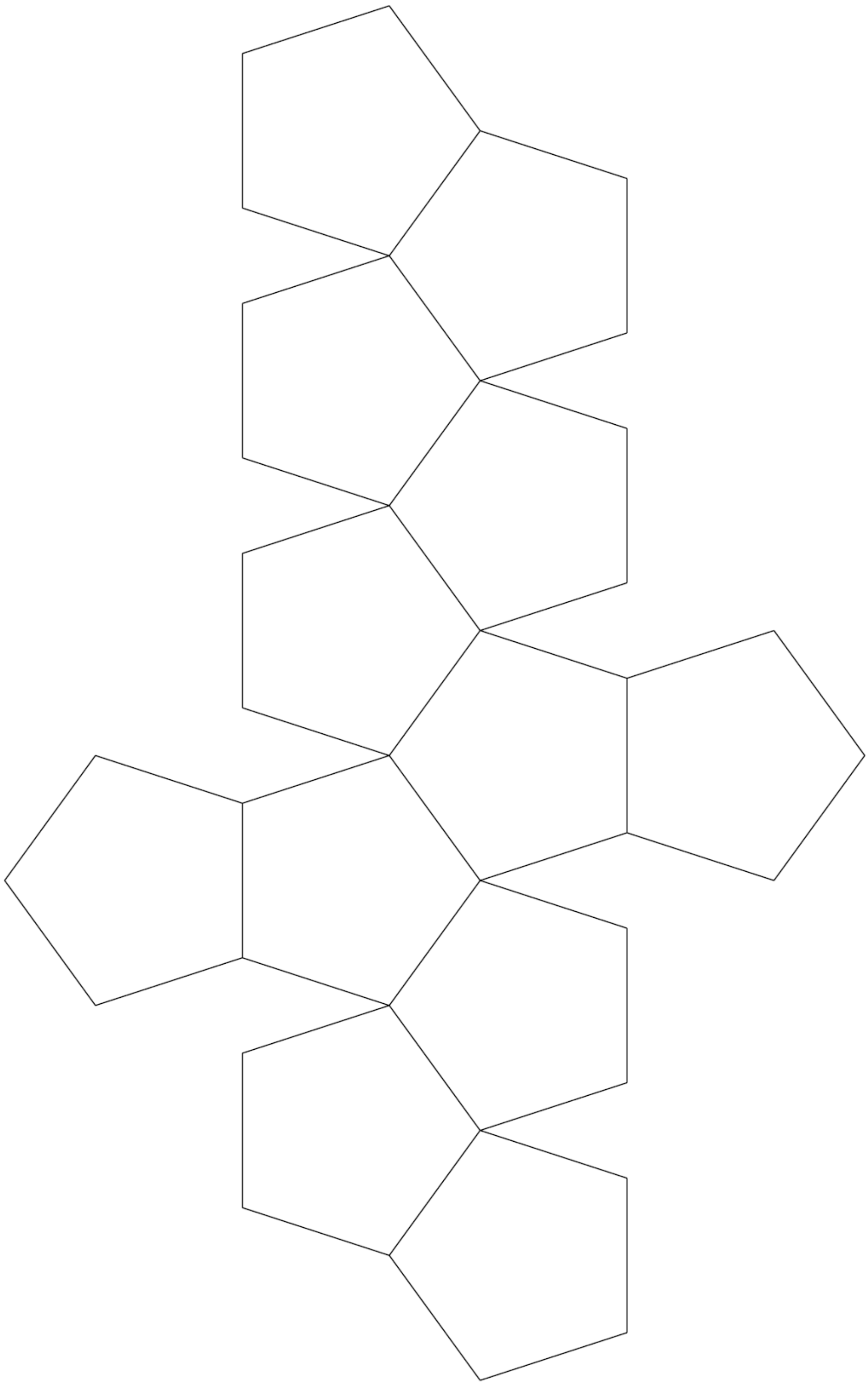




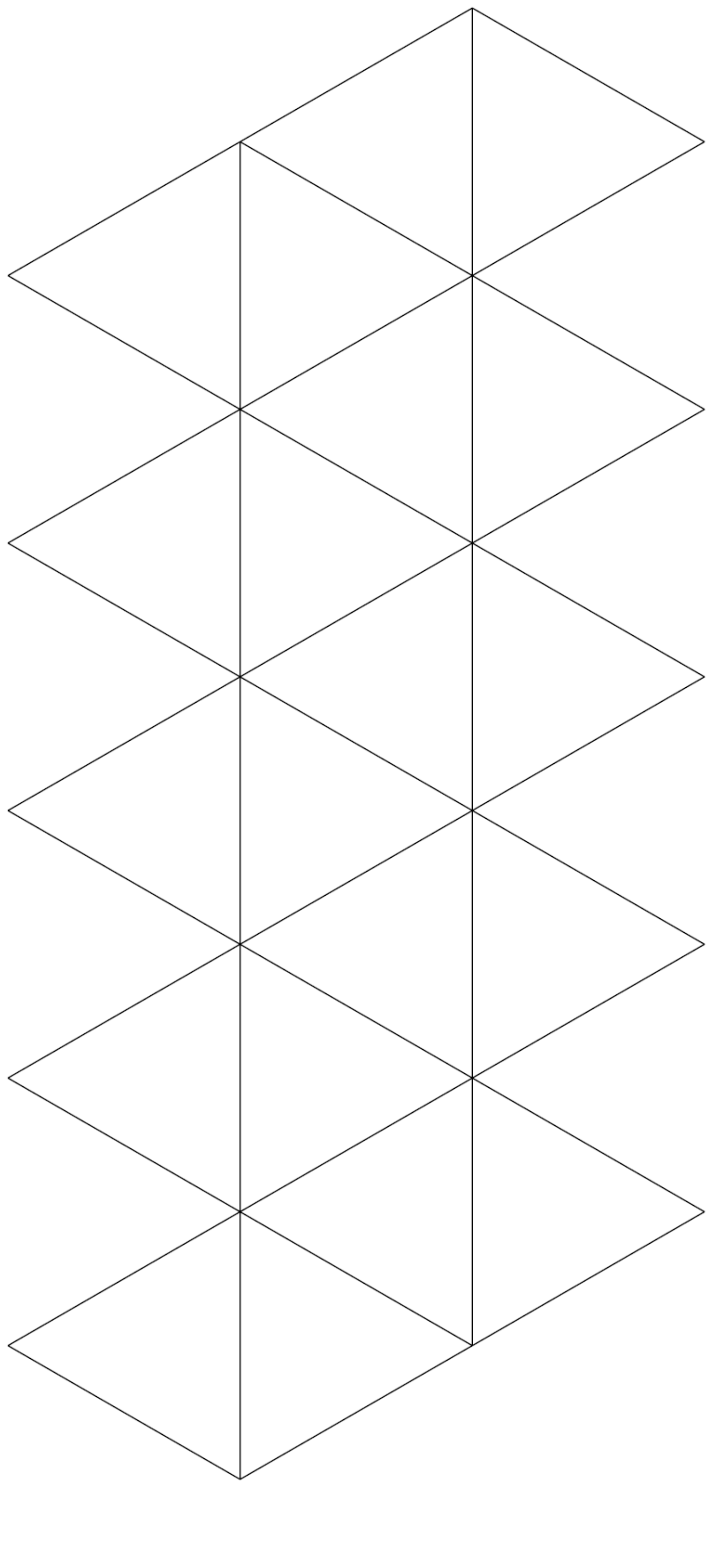
příklad sítě pravidelného osmistěnu:



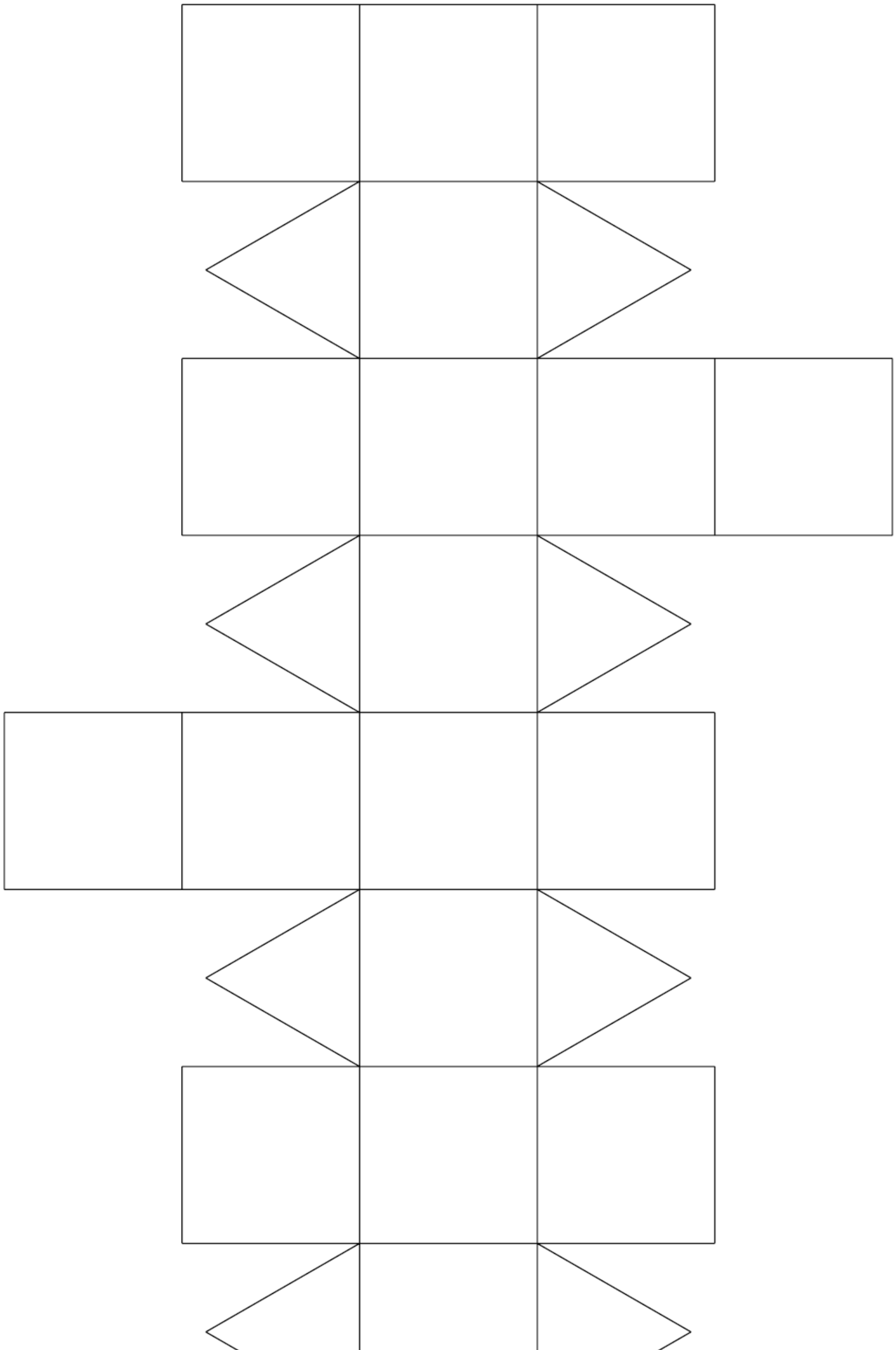
příklad sítě pravidelného dvanáctistěnu:



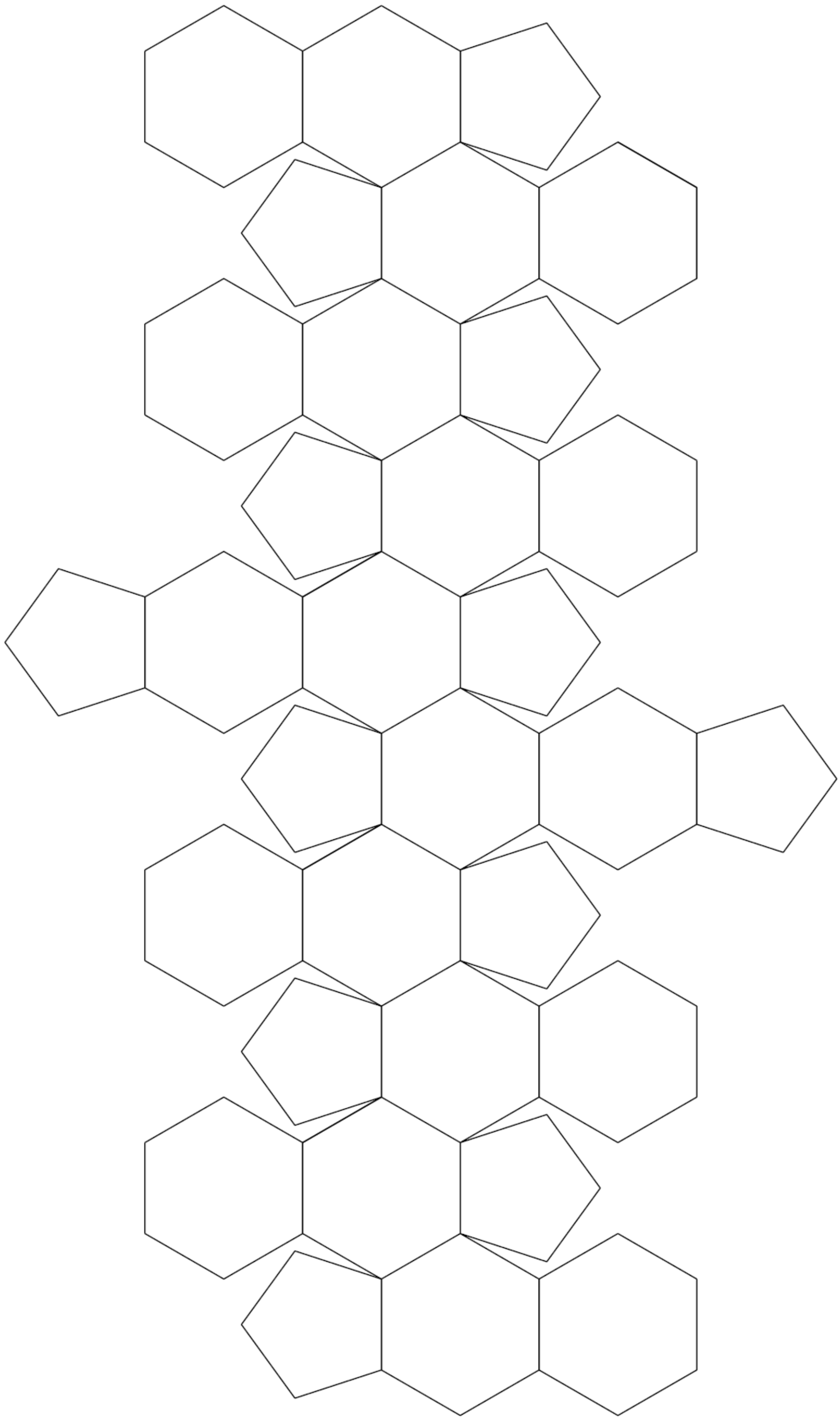
příklad sítě pravidelného dvacetistěnu:



příklad sítě šestadvacetistěnu:



příklad sítě dvaatřicetistěnu:



Příloha B: Doplňkové výpočty

Zde jsou doloženy výpočty objemů a povrchů mnohostěnů, dále pak výpočet jejich poměrů vzhledem k objemu a povrchu koule. Jde o přílohu kapitoly 2.3.

koule:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S = 4\pi R^2$$

Výpočet objemů *a* povrchů pravidelných mnohostěnů v tab.2.2.1 je vztažen ke straně *a*, která je zde vyjádřena pomocí poloměru koule vepsané *R*.

čtyřstěn:

$$V_K = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \left(12\frac{R}{\sqrt{6}}\right)^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{24R^3}{\sqrt{3}}$$

$$S_K = \sqrt{3}a^2 = \left(12\frac{R}{\sqrt{6}}\right)^2 \sqrt{3} = 24\sqrt{3}R^2$$

poměr objemů: $\frac{V_K}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{24R^3}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18} = 0{,}302$

poměr povrchů: $\frac{S_K}{S} = \frac{4\pi R^2}{24\sqrt{3}R^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18} = 0{,}302$

šestistěn:

$$V = a^3 = (2R)^3$$

$$S = 6a = 6(2R)^2$$

poměr objemů: $\frac{V_K}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{(2R)^3} = \frac{\pi}{6} = 0{,}524$

poměr povrchů: $\frac{S_K}{S} = \frac{4\pi R^2}{6(2R)^2} = \frac{\pi}{6} = 0{,}524$

osmistěn:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{6}R\right)^3 = 4\sqrt{3}R^3$$

$$S = 2\sqrt{3}a^2 = 2\sqrt{3}\left(\sqrt{6}R\right)^2 = 12\sqrt{3}R^2$$

poměr objemů: $\dfrac{V_K}{V} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\sqrt{3}R^3} = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{9} = 0{,}605$

poměr povrchů: $\dfrac{S_K}{S} = \dfrac{4\pi R^2}{12\sqrt{3}R^2} = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{9} = 0{,}605$

dvanáctistěn:

$$V = \frac{\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}a^3 = \frac{\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}\left(\frac{20R}{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}\right)^3$$

$$S = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 3\left(\frac{20R}{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}\right)^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

poměr objemů: $\dfrac{V_K}{V} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{\left(15+7\sqrt{5}\right)(20R)^3}{4\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}^3}} = \dfrac{\left(25+11\sqrt{5}\right)\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}\pi}{150\left(15+7\sqrt{5}\right)} = 0{,}755$

poměr povrchů: $\dfrac{S_K}{S} = \dfrac{4\pi R^2}{3\left(\frac{20R}{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}\right)^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}} = \dfrac{\left(25+11\sqrt{5}\right)\pi}{30\sqrt{25+10\sqrt{5}}} = 0{,}755$

dvacetistěn:

$$V = \frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)a^3 = \frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\frac{12R}{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}\right)^3 = \frac{40\sqrt{3}R^3}{\left(7+3\sqrt{5}\right)}$$

$$S = 5\sqrt{3}a^2 = 5\sqrt{3}\left(\frac{12R}{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}\right)^2 = \frac{120\sqrt{3}R^2}{\left(7+3\sqrt{5}\right)}$$

poměr objemů: $\dfrac{V_K}{V} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{40\sqrt{3}R^3}{7+3\sqrt{5}}} = \dfrac{\left(7+3\sqrt{5}\right)\sqrt{3}\pi}{90} = 0{,}829$

poměr povrchů: $\dfrac{S_K}{S} = \dfrac{4\pi R^2}{\frac{120\sqrt{3}R^2}{\left(7+3\sqrt{5}\right)}} = \dfrac{\sqrt{3}\left(7+3\sqrt{5}\right)\pi}{90} = 0{,}829$

šestadvacetistěn:

Vzorce pro výpočet objemu i povrchu byly odvozeny autorem. Těleso je dle potřeby rozděleno na dílčí části, a vzorec je součtem objemů či povrchů těchto částí. Pomocné délky byly odvozeny od délky strany krychle, jejímž ořezáním těleso vzniklo. *a* je délka strany původní krychle: *a* = *2R*. *R* je poloměr koule krychli a 26ti-stěnu vepsané.

b je délka strany 26ti-stěnu: $b=\dfrac{\sqrt{2}a}{2+\sqrt{2}}$.

c je polovina rozdílu délek a, b: $c=\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{b}{\sqrt{2}}=\dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$.

V případě výpočtu objemu bylo těleso rozděleno na 27 částí:

1 středovou krychli o straně *b*,

6 kvádrů o stranách *b, b, c,*

12 hranolů s podstavou pravoúhlého trojúhelníka (o stranách *c, c, b*) a výškou *b*. Pro zjednodušení jsou poskládány po dvou do šesti kvádrů o rozměrech c, c, b.

8 jehlanů, které ale dávají dohromady jeden pravidelný osmistěn o straně *b*.

$$V=b^3+6b^2\frac{b}{\sqrt{2}}+6b\frac{b^2}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}b^3=b^3+3\sqrt{2}b^3+3b^3+\frac{\sqrt{2}}{3}b^3=b^3\left(4+\frac{10}{3}\sqrt{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{2}R}{2+\sqrt{2}}\right)^3\left(4+\frac{10}{3}\sqrt{2}\right)=4{,}954R^3$$

Pro výpočet povrchu byl samozřejmě 26ti-stěn rozdělen na 26 dílů:

18 čtverců o straně b

a 8 trojúhelníků o straně b.

$$S=18b^2+8\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=\left(18+2\sqrt{3}\right)b^2=\left(18+2\sqrt{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}R}{2+\sqrt{2}}\right)^2=14{,}731R^2$$

poměr objemů: $\dfrac{V_K}{V}=\dfrac{4{,}189R^3}{4{,}954R^3}=0{,}845$

poměr povrchů: $\dfrac{S_K}{S}=\dfrac{12{,}566R^2}{14{,}731R^2}=0{,}853$

dvaatřicetistěn:

Použité vzorce jsou původně vztahovány k délce strany tělesa a, tudíž jsou upraveny pro poloměr koule vepsané R. Ten je brán stejný jako pro dvacetistěn, ze kterého těleso ořezáním vzniklo. Již bylo uvedeno, že délka hrany 32-stěnu je třetinou délky původního 20-stěnu. V případě objemu je použit již vypočítaný objem dvacetistěnu, a z něj odečten dvanáctkrát objem odřezávaného jehlanu.

$$V=\frac{40\sqrt{3}R^3}{\left(7+3\sqrt{5}\right)}-12V'=5{,}054R^3-0{,}310R^3=4{,}744R^3$$

Objem jehlanu V' je: $V' = \frac{S_P v}{3}$, kde S_P je obsah podstavy vypočítaný jako obsah pravidelného pětiúhelníku: $S_P = \left(\frac{4R}{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}\right)^2 \frac{\sqrt{\left(25+10\sqrt{5}\right)}}{4} = \frac{2\sqrt{\left(25+10\sqrt{5}\right)}R^2}{3(7+3\sqrt{5})}$,

v je výška jehlanu dopočítaná jako odvěsna v pravoúhlém trojúhelníku o druhé odvěsně r_s a přeponě a.

$$r_s = \frac{4R}{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}\frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}}{10}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{4R}{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}\right)^2 - \left(\frac{4R}{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}\frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}}{10}\right)^2} = \frac{4R}{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{90}}$$

Co se týče výpočtu povrchu, byl logicky proveden jako součet dvaceti šestiúhelníků (každý šestiúhelník má 2/3 obsahu původního trojúhelníku) a dvanácti pětiúhelníků (viz. S_P).

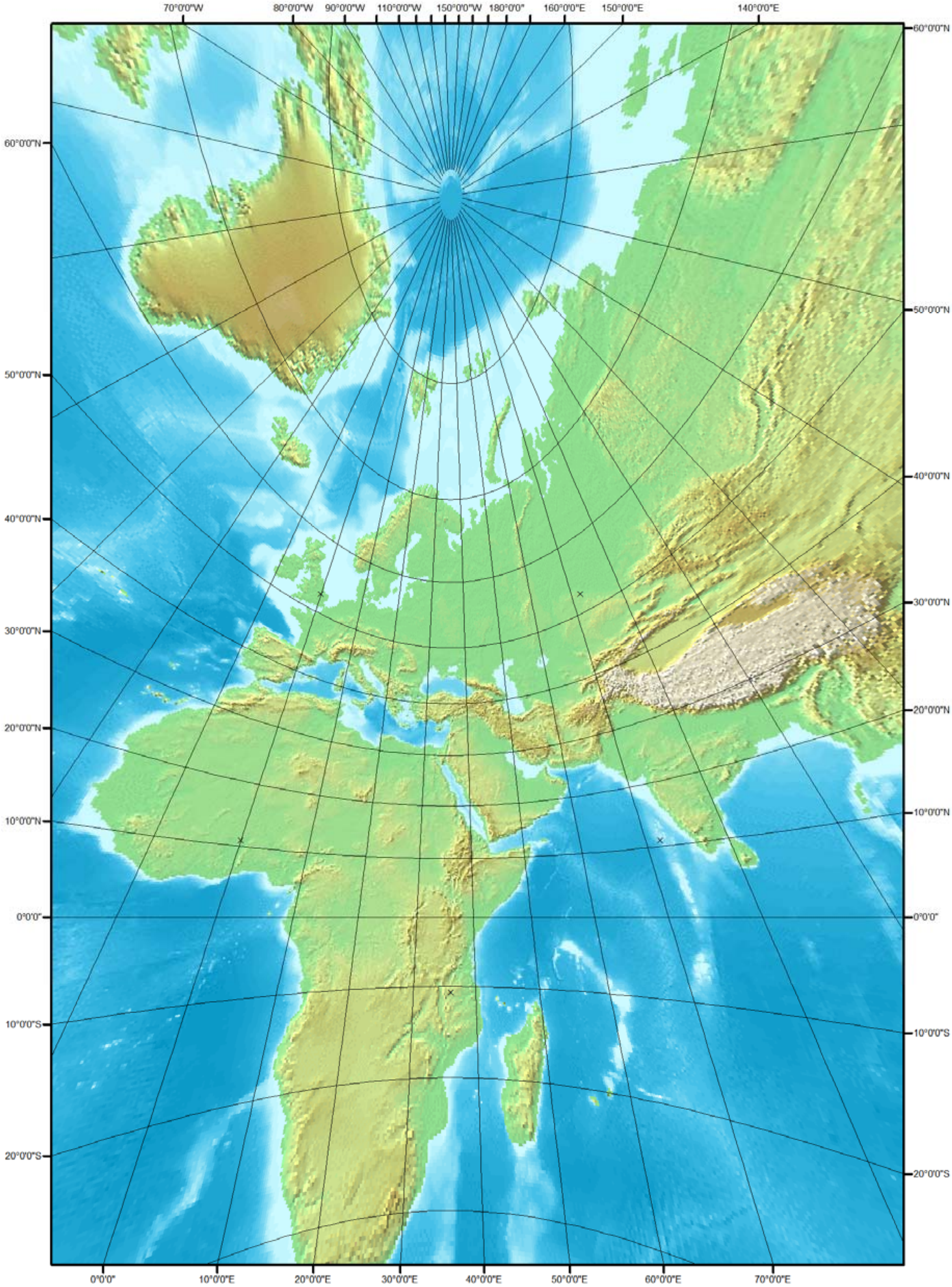
$$S = 20\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{12R}{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}\right)^2 + 12\frac{\sqrt{\left(25+10\sqrt{5}\right)}2R^2}{3(7+3\sqrt{5})} = 10{,}108R^2 + 4{,}016R^2 = 14{,}124R^2$$

poměr objemů: $\frac{V_K}{V} = \frac{4{,}189R^3}{4{,}744R^3} = 0{,}883$

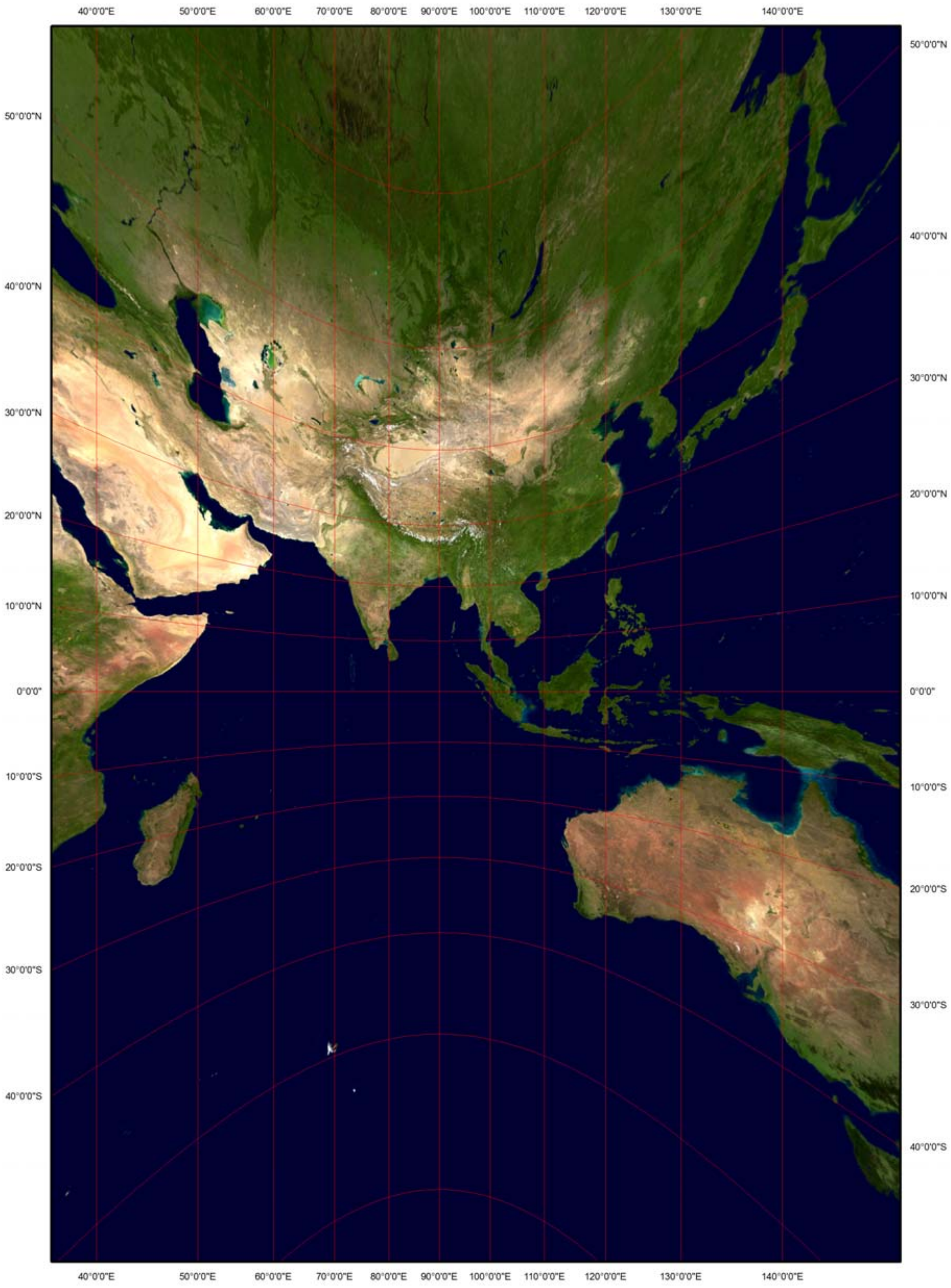
poměr povrchů: $\frac{S_K}{S} = \frac{12{,}566R^2}{14{,}124R^2} = 0{,}890$

Příloha C: Ukázka použitého mapového podkladu

Část mapy světa Demis (gnomonická projekce; bez měřítka)



Část mapy světa Blue Marble (gnomonická projekce; bez měřítka)



Příloha D: Zobrazení Země na mnohostěnech v sítích

Přílohou jsou popsaná vyobrazení Země vytištěná na deseti listech papíru formátu A2 (v jednom případě formátu A1) a přiložená k Bakalářské práci v označeném tubusu.

Příloha E: Modely zobrazení Země na mnohostěnech

Přílohou jsou prostorové papírové modely.